



**Víctor F. Breña Medina**

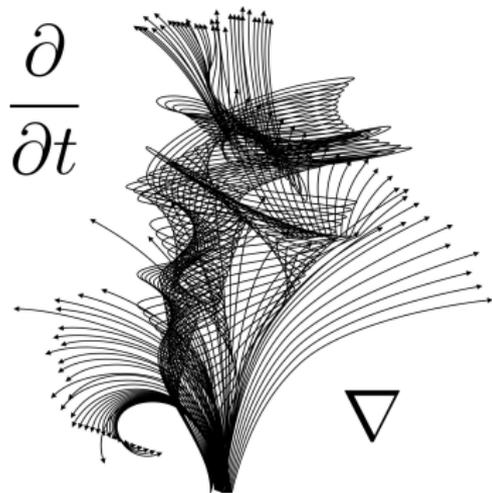
Centro de Ciencias Matemáticas, UNAM  
Department of Engineering Mathematics, UoB

## Tiempo y espacio en biomatemáticas; bifurcaciones y dinámica aplicada

ESCUELA DE MATEMÁTICAS DE AMÉRICA LATINA  
Y EL CARIBE,  
CASA MATEMÁTICA OAXACA  
14 de junio, 2016

# Tabla de contenidos

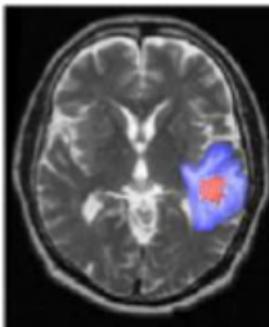
- 1 Forma y movimiento
- 2 Eventos especiales
- 3 Algunos ejemplos
- 4 Comentarios finales



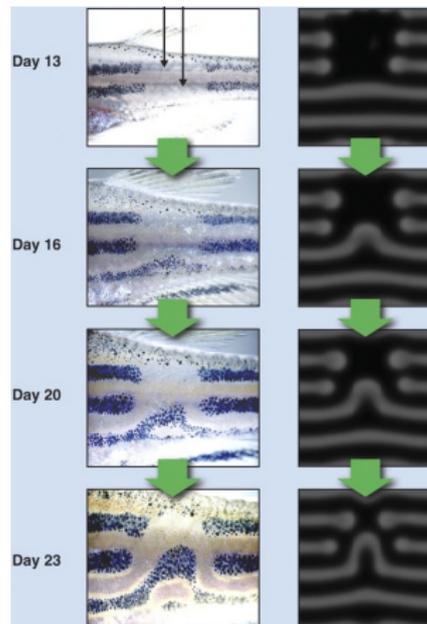
Conchas marinas  
H. Meinhardt, 1995



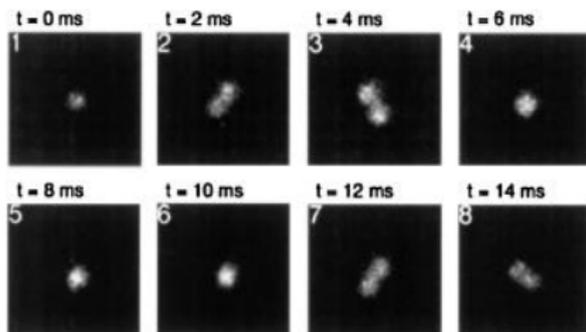
Piel de peces  
A. R. Sandersen, 2006



Glioblastoma multiforma  
O. Clatz et al., 2004



Tejido dañado  
S. Kondo & T. Miura, 2010

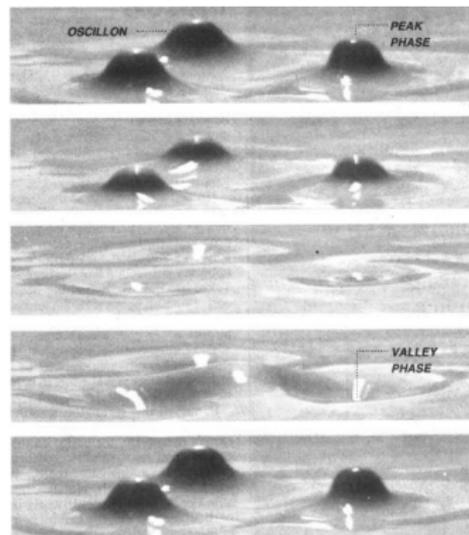


Respiradores en descarga de gases  
V. K. Vanag & I. R. Epstein, 2007



Ferrosolitones

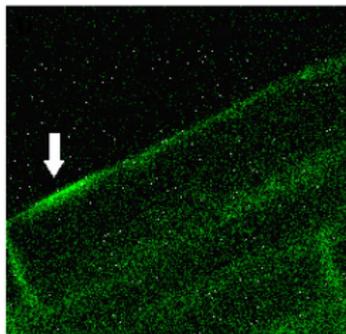
R. Richter & I. V. Barashenkov, 2005



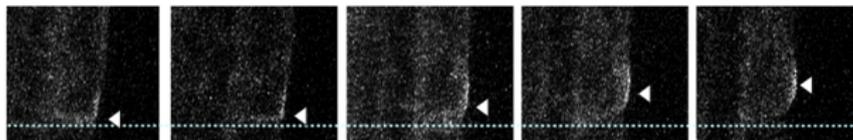
Oscilones de arcilla  
B. L. Gary, 1999

## Procesos de iniciación bioquímica a nivel subcelular

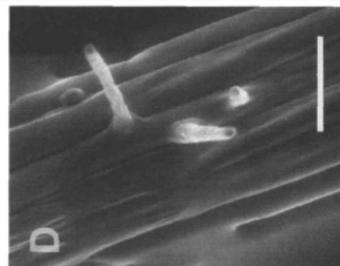
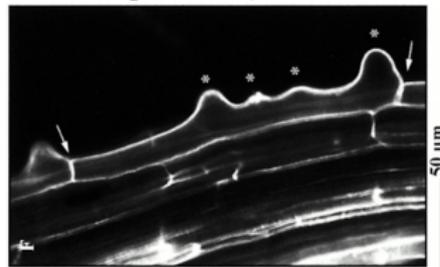
C. Grierson, 2009



C. Grierson, 2009

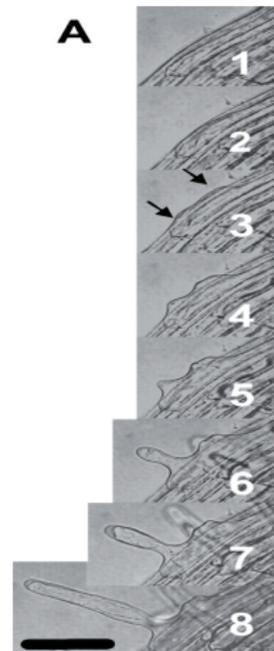


S. Rigas *et al.*, 2001



J. Massuci &  
J. Schiefelbein, 1994

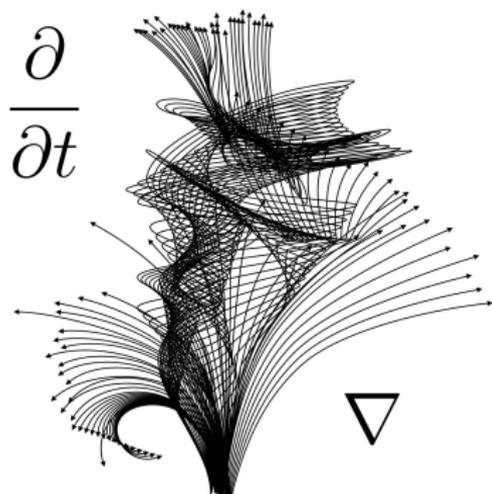
**A**

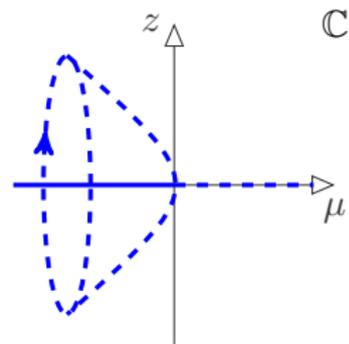
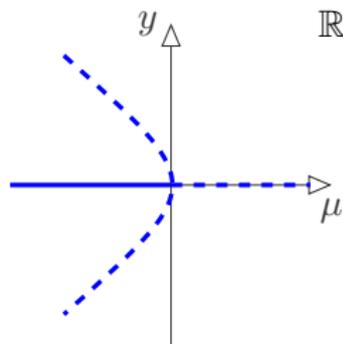
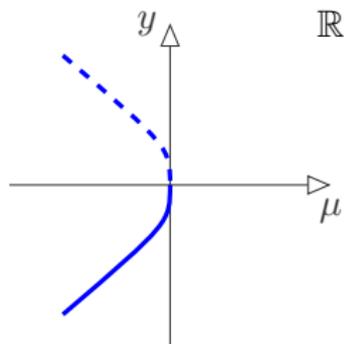
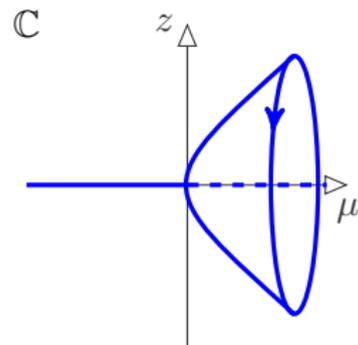
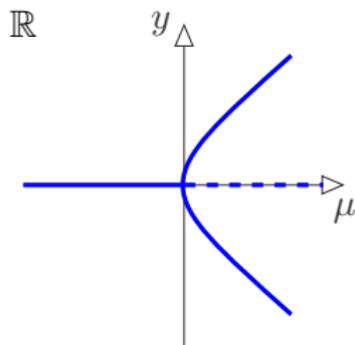
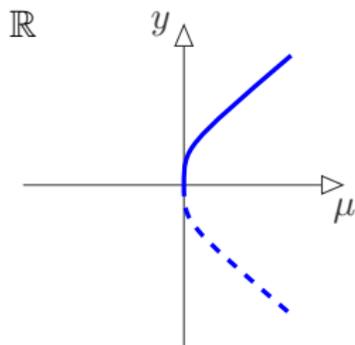


M. Jones &  
J. Smirnov, 2006

# Tabla de contenidos

- 1 Forma y movimiento
- 2 **Eventos especiales**
- 3 Algunos ejemplos
- 4 Comentarios finales



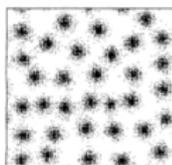
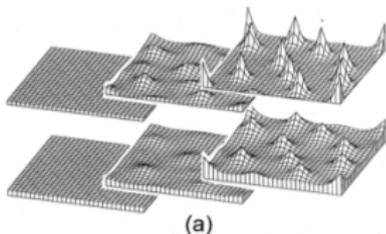


$$\dot{y} = f(y; \mu)$$

Difusión + Reacción  $\sim$  Estabilidad temporal + Inestabilidad espacial

$U, V$  : concentraciones de sustancias (bio)químicas  
 $D_1, D_2$  : coeficientes de difusión       $F, G$  : términos cinéticos

☞  $D_1 D_2 \ll \max\{D_1, D_2\}$ ,     $\text{sign} \left\{ \left( \frac{\partial F}{\partial U} \right) \left( \frac{\partial G}{\partial V} \right) \right\} < 0$ .

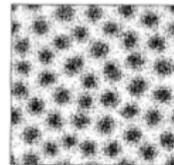
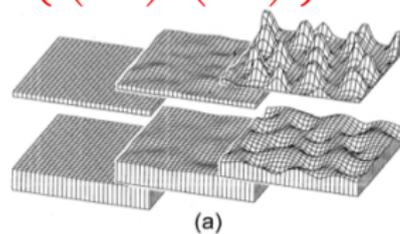


(b)

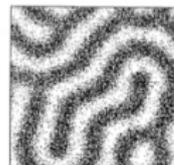


(c)

Activador-inhibidor



(b)



(c)

Activador-substrato

Koch & Meinhardt, 1994

Bifurcación de Turing

## Ecuación de Swift–Hohenberg:

$$U_t = -\frac{\delta\mathcal{E}_{ij}}{\delta U},$$

$$\mathcal{E}_{35}(U) = \int_{\mathbb{R}} \left[ \frac{[(1 + \partial_{yy})U]^2}{2} + \frac{\mu U^2}{2} - \frac{\nu U^4}{4} + \frac{U^6}{6} \right] dy,$$

$$\mathcal{E}_{23}(U) = \int_{\mathbb{R}} \left[ \frac{[(1 + \partial_{yy})U]^2}{2} + \frac{\mu U^2}{2} - \frac{\nu U^3}{3} + \frac{U^4}{4} \right] dy.$$

La ecuación de estados (dinámica espacial):

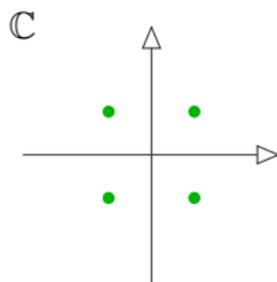
$$\frac{\delta\mathcal{E}_{ij}}{\delta U} = -(1 + \partial_{yy})^2 U - \mu U + \nu U^{3,2} - U^{5,3} = 0,$$

☞  $\mathbf{u}' = \mathbf{f}(\mathbf{u}; \mu), \quad \mathbf{u} = [U, U_y, U_{yy}, U_{yyy}]^T,$

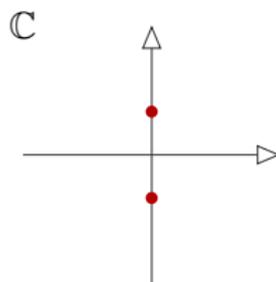
☞  $\mathcal{R}^2 = \mathbb{I}, \quad \mathcal{R}\mathbf{f}(\mathbf{u}; \mu) = -\mathbf{f}(\mathcal{R}\mathbf{u}; \mu).$



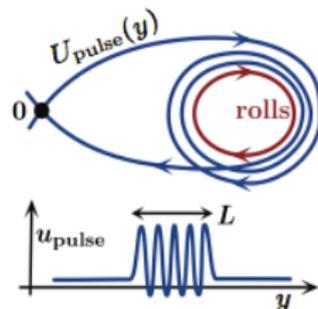
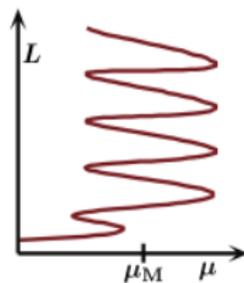
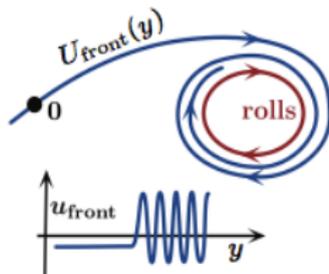
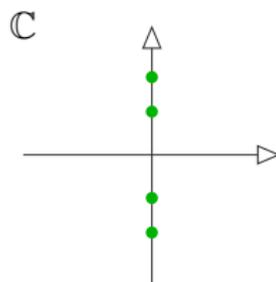
$$\mu < 0$$



$$\mu = 0$$

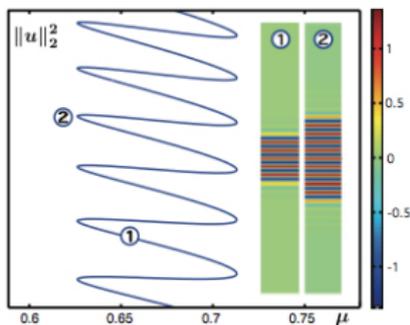
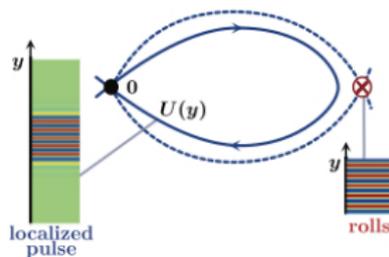
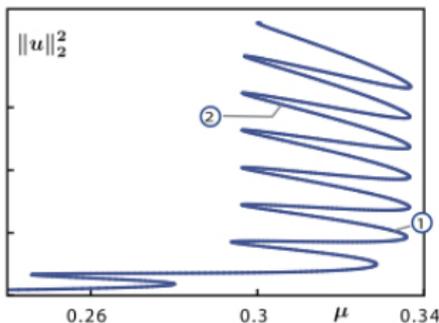
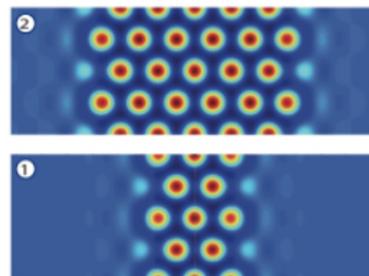


$$\mu > 0$$



Avitabile *et al.*, 2010

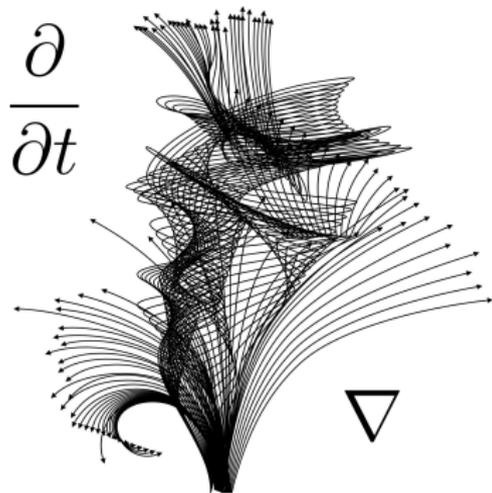
## Bifurcación de Hamilton–Hopf

 $\mathcal{E}_{35}(U)$ Avitabile *et al.*, 2010 $\mathcal{E}_{23}(U)$ Lloyd *et al.*, 2008

## Bifurcación de Hamilton–Hopf

# Tabla de contenidos

- 1 Forma y movimiento
- 2 Eventos especiales
- 3 Algunos ejemplos**
- 4 Comentarios finales



## Reacción

$$U_t = D_1 \Delta U + \overbrace{k_2 U^2 V} - (c + r)U + hV,$$

$$V_t = \underbrace{D_2 \Delta V}_{\text{Difusión}} - k_2 U^2 V + cU - hV + b.$$

☞ Invariante ante traslaciones en el espacio.

☞ Reversibilidad espacial:

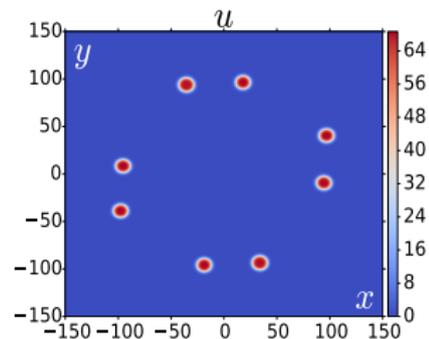
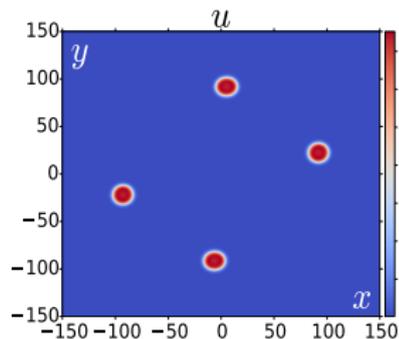
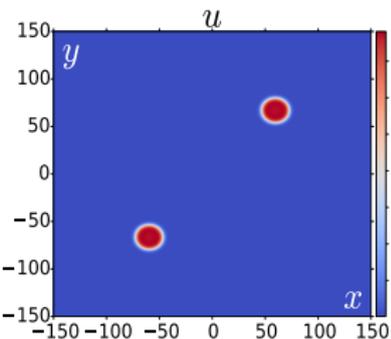
$$[U_x, V_x]^T \rightarrow [-U_x, -V_x]^T \quad y \quad [U_y, V_y]^T \rightarrow [-U_y, -V_y]^T,$$

$$x \rightarrow -x \quad y \quad y \rightarrow -y.$$

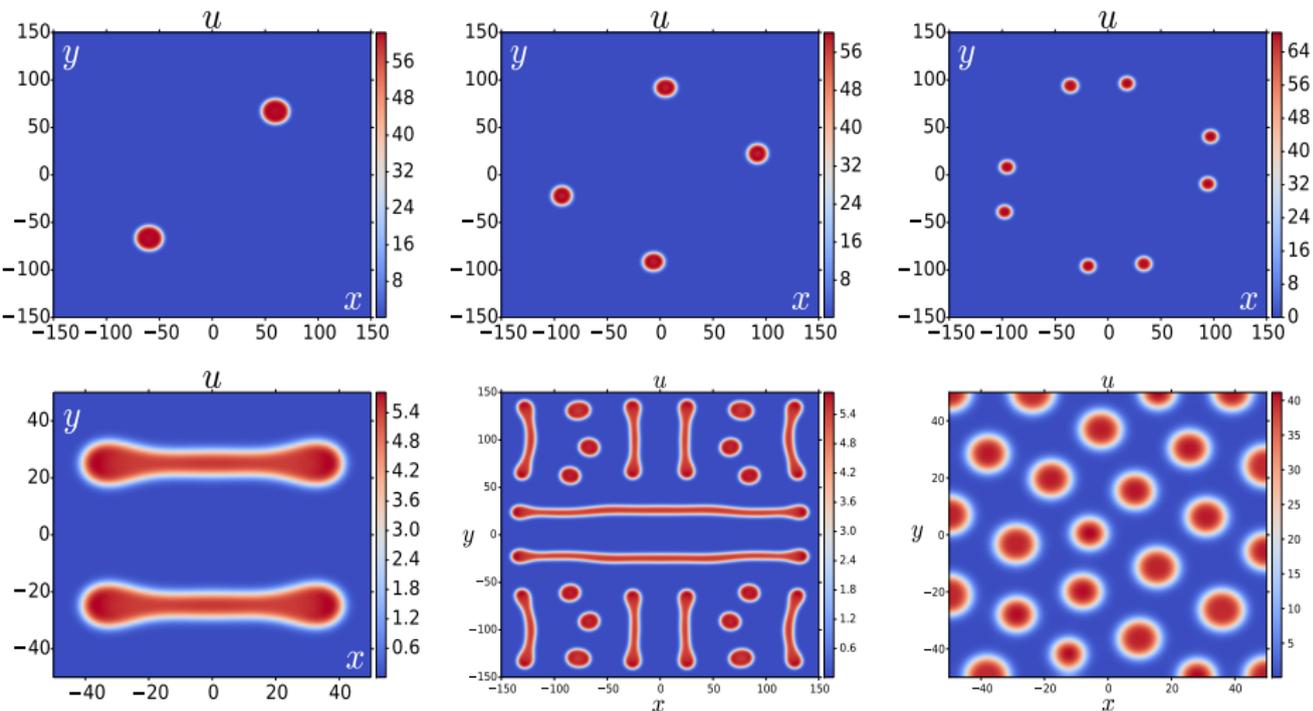
☞ Estado de equilibrio único:  $[U_0, V_0]^T$ .

☞ No tiene energía asociada.

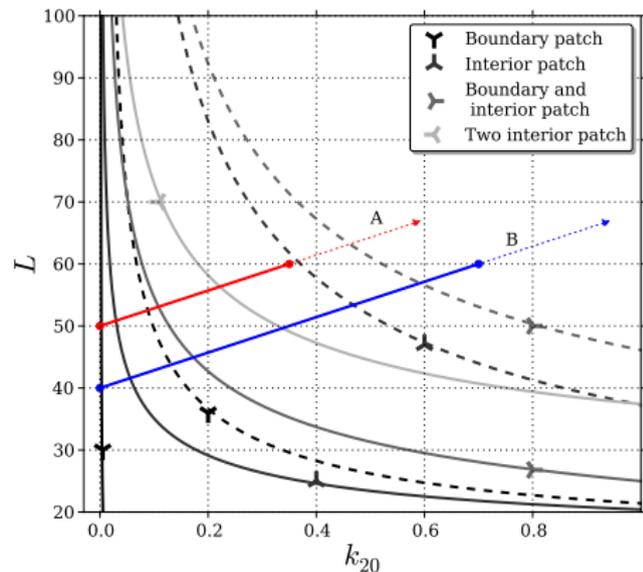
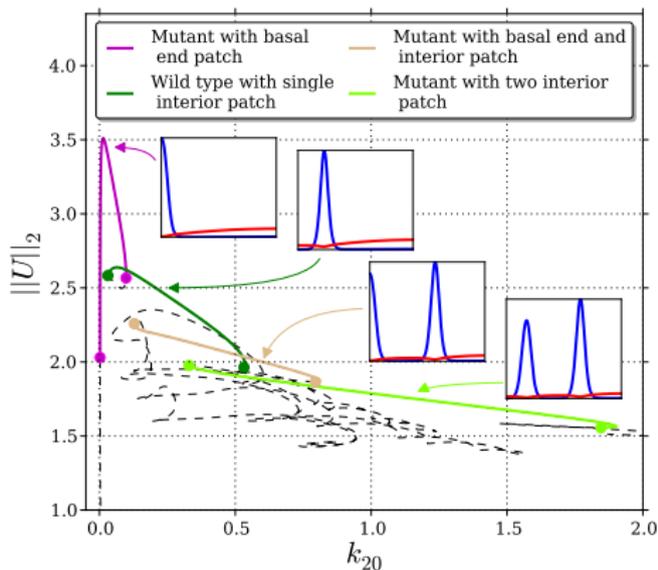
☞ Transición de criticalidad en bifurcaciones de Turing (tenedor).



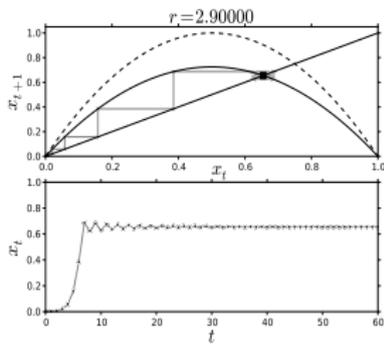
... junto con A. Champneys  
 Phys. Rev. E **90**, 032923 (2014).



... junto con A. Champneys  
 Phys. Rev. E **90**, 032923 (2014).

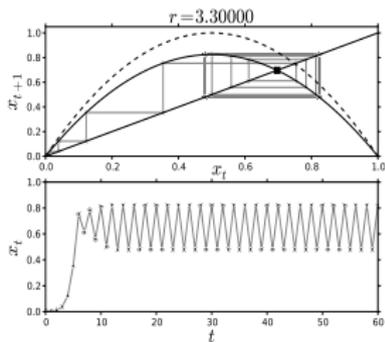
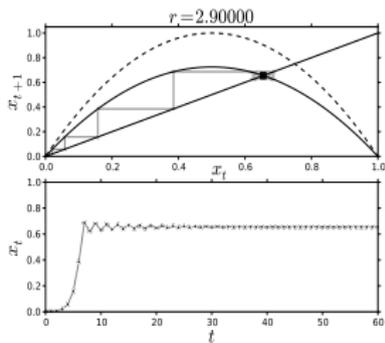


... junto con A. Champneys, C. Grierson & M. Ward  
 SIAM J. Appl. Dyn. Syst. **13**(1), pp. 210–248 (2014).



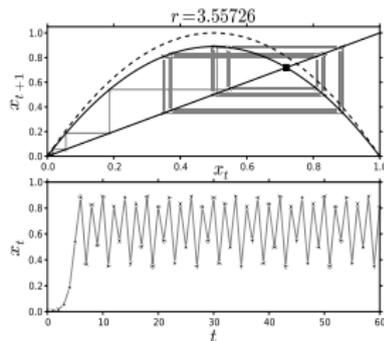
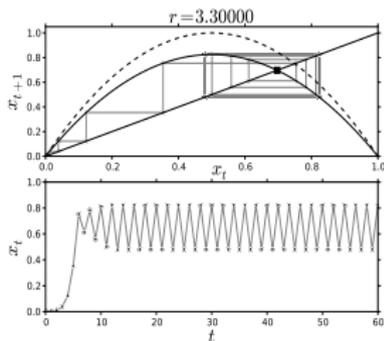
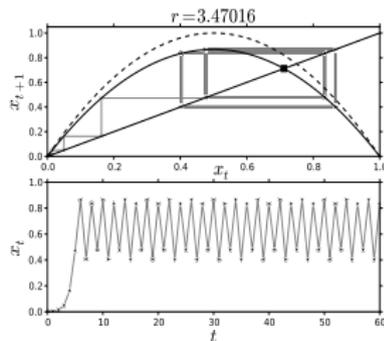
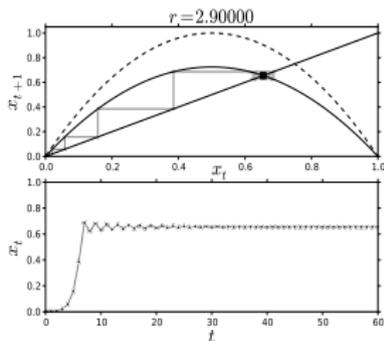
$$x_{t+1} = rx_t(1 - x_t), \quad 0 \leq r \leq 4.$$

## Una población de cerdos



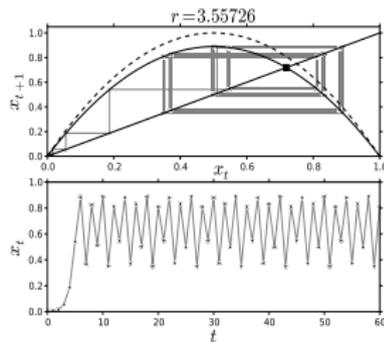
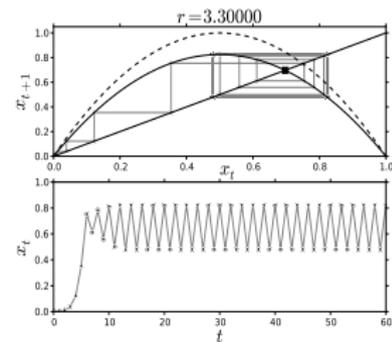
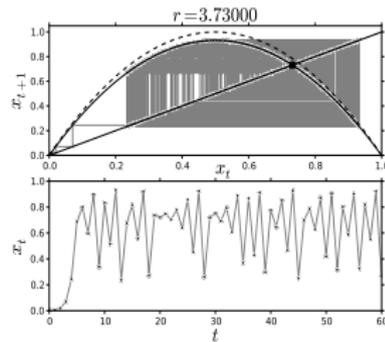
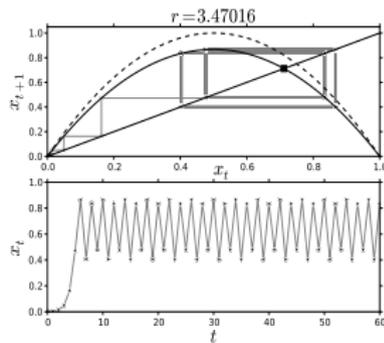
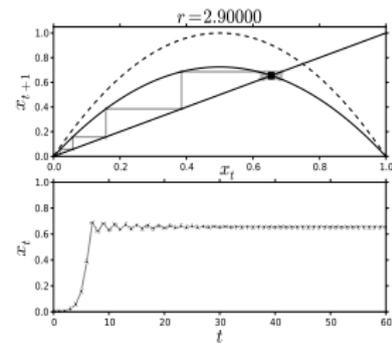
$$x_{t+1} = rx_t(1 - x_t), \quad 0 \leq r \leq 4.$$

## Una población de cerdos



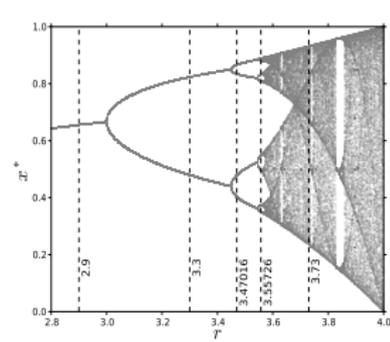
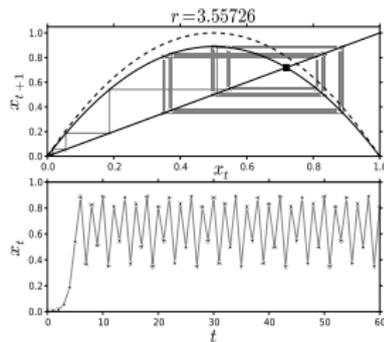
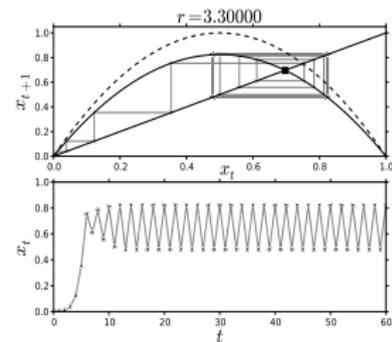
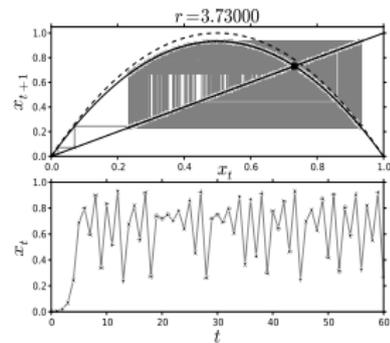
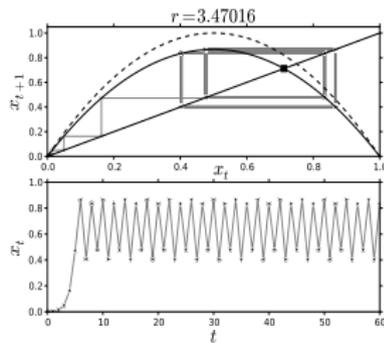
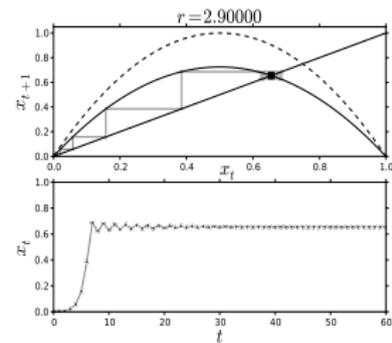
$$x_{t+1} = rx_t(1 - x_t), \quad 0 \leq r \leq 4.$$

## Una población de cerdos



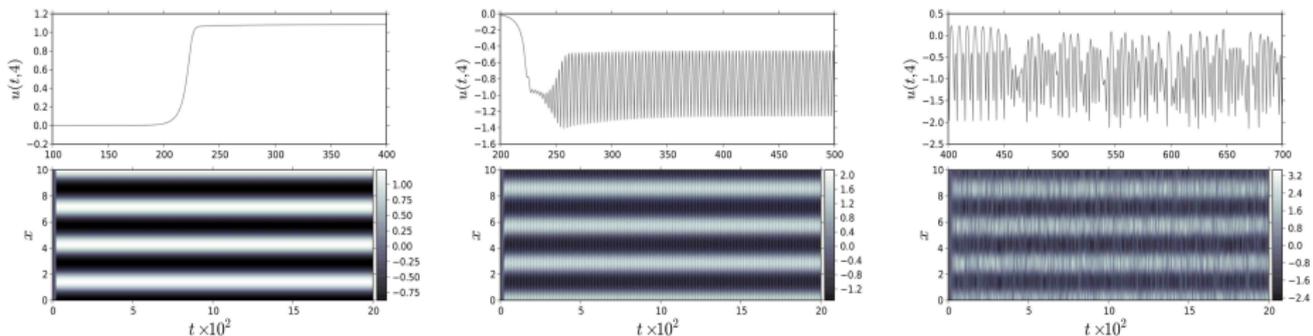
$$x_{t+1} = rx_t(1 - x_t), \quad 0 \leq r \leq 4.$$

## Una población de cerdos



$$x_{t+1} = rx_t(1 - x_t), \quad 0 \leq r \leq 4.$$

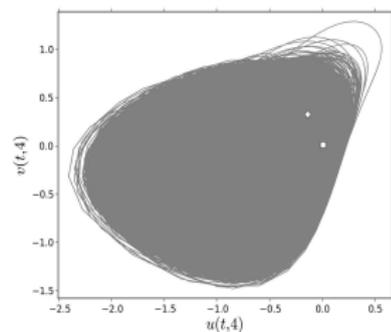
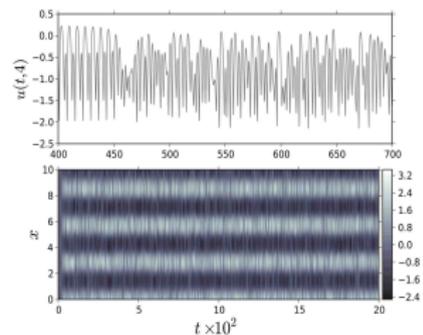
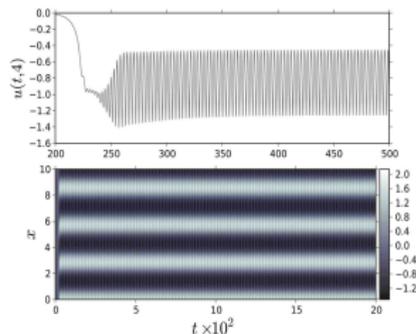
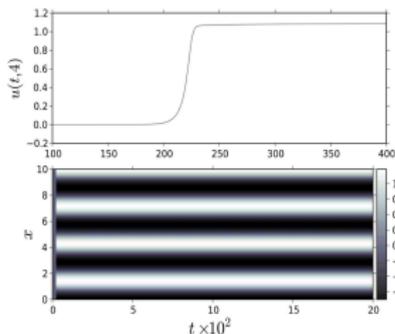
## Ruta al caos Ruelle–Takens–Newhouse



Aragón *et al.*, 2012

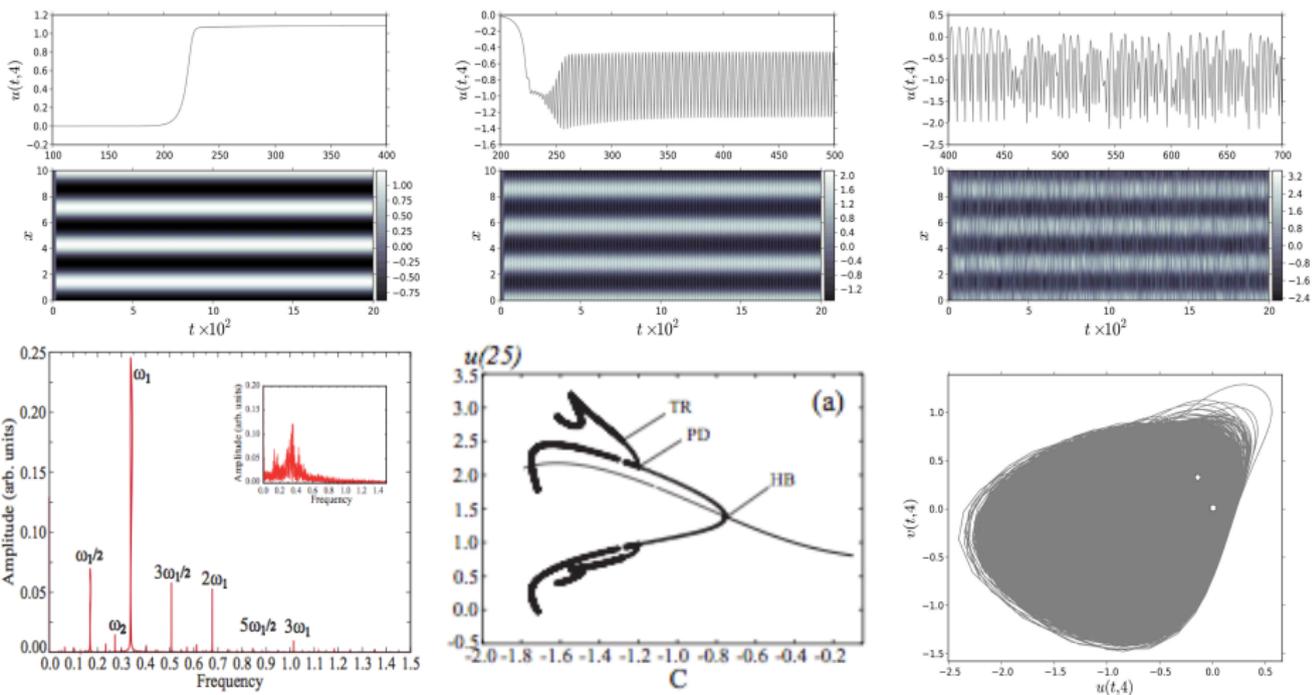
Caos: ¿un orden para el desorden?,  
SAHUARUS, Revista de Matemáticas, Depto. de Mat.,  
U. de Sonora (por aparecer).

## Ruta al caos Ruelle–Takens–Newhouse

Aragón *et al.*, 2012

Caos: ¿un orden para el desorden?,  
SAHUARUS, Revista de Matemáticas, Depto. de Mat.,  
U. de Sonora (por aparecer).

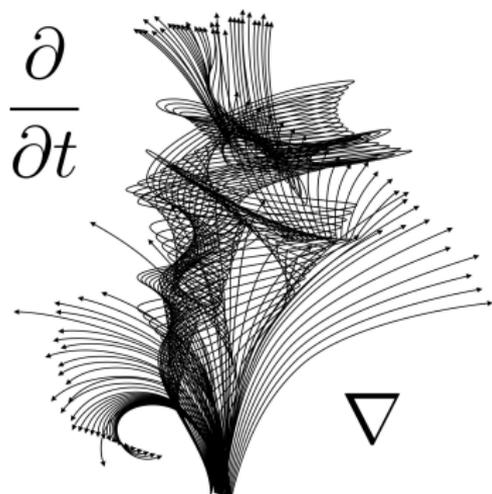
## Ruta al caos Ruelle–Takens–Newhouse

Aragón *et al.*, 2012

Caos: ¿un orden para el desorden?,  
 SAHUARUS, Revista de Matemáticas, Depto. de Mat.,  
 U. de Sonora (por aparecer).

# Tabla de contenidos

- 1 Forma y movimiento
- 2 Eventos especiales
- 3 Algunos ejemplos
- 4 Comentarios finales**



- 👉 Los **sistemas dinámicos** (discretos o continuos) pueden arrojar luz al entendimiento de fenómenos biológicos.
- 👉 Las **bifurcaciones** son fenómenos dinámicos clave para el entendimiento de procesos que experimentalmente son inaccesibles.
- 👉 No siempre es posible asociar un **funcional de energía**.
- 👉 La descripción de fenómenos biológicos pueden ser descritos por ingredientes de naturaleza **no-homogénea** en un sistema dinámico.
- 👉 ¿Cómo incorporar hipótesis **más realistas** en estos sistemas? Procesos de difusión heterogéneos, propiedades geométricas, interacciones simultáneas en diversas escalas espacio-temporales. . . .
- 👉 **Becas de elaboración de tesis de licenciatura para este año.**



# POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS



El Centro de Ciencias Matemáticas de la **Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM)**, el Instituto de Física y Matemáticas y la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la **Universidad Michoacana de San Nicolás Hidalgo (UMSNH)**, convocan al proceso de admisión al Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas, que se ofrece en la ciudad de Morelia, Michoacán. Dirigido a los egresados de las licenciaturas y/o maestrías en matemáticas y áreas afines.

### ÁREAS DE INVESTIGACIÓN

Análisis Funcional Teoría de grupos Física Matemática Teoría de control Geometría diferencial Topología algebraica Geometría combinatoria Teoría de conjuntos Sistemas dinámicos	Biomatemáticas Combinatoria Teoría de números Ecuaciones diferenciales Teoría de representaciones Geometría algebraica Topología de conjuntos Matemáticas aplicadas
--	--

### PUBLICACIÓN DE CONVOCATORIA

Octubre y Marzo

### COORDINACIÓN DE POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

 <http://pccm.umich.unam.mx>  
 [www.matmor.unam.mx](http://www.matmor.unam.mx)  
 (443) 322 - 2741

### INFORMES

 [posmat@matmor.unam.mx](mailto:posmat@matmor.unam.mx)

### FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS Y EL INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS UMSNH

 [www.ifm.umich.mx](http://www.ifm.umich.mx)  
[www.fismat.umich.mx](http://www.fismat.umich.mx)  
 (443) 322 - 3500 ext. 3070



**FisMat**  
Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas



**ifm**  
INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS



**CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS**





Alberto Montt