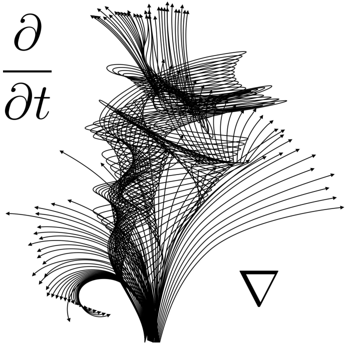
Víctor F. Breña Medina

Centro de Ciencias Matemáticas, UNAM
Department of Engineering Mathematics, UoB

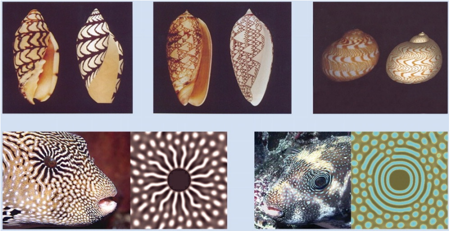
Tiempo y espacio en biomatemáticas; bifurcaciones y dinámica aplicada

Escuela de Matemáticas de América latina y el Caribe,
Casa Matemática Oaxaca
14 de junio, 2016

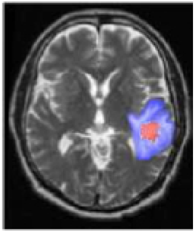
Tabla de contenidos



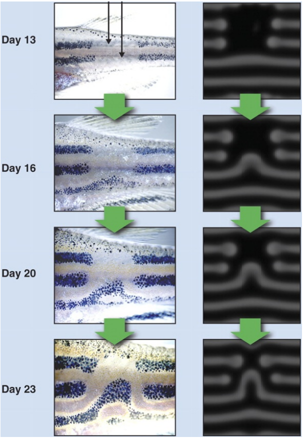
Conchas marinas
H. Meinhardt, 1995



Piel de peces
A. R. Sandersen, 2006

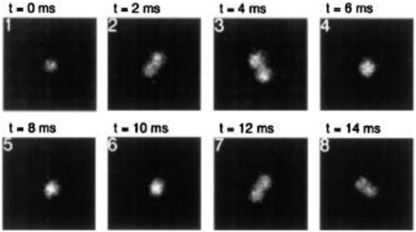


Glioblastoma multiforma
O. Clatz et al., 2004



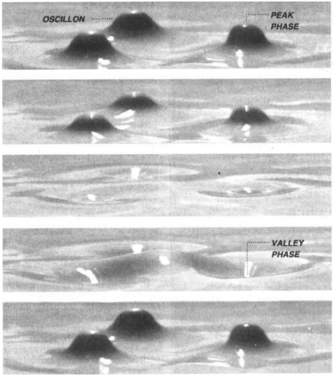
Tejido dañado
S. Kondo & T. Miura, 2010

CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS



Respiradores en descarga de gases
V. K. Vanag & I. R. Epstein, 2007

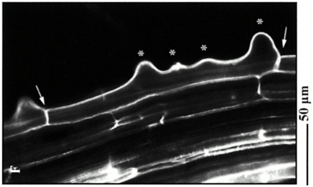
Ferrosolitones
R. Richter & I. V. Barashenkov, 2005



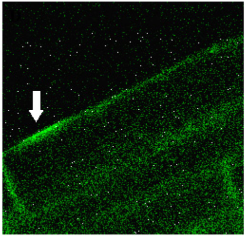
Oscilones de arcilla
B. L. Gary, 1999

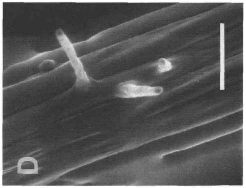
Procesos de iniciación bioquímica a nivel subcelular

S. Rigas *et al.*, 2001

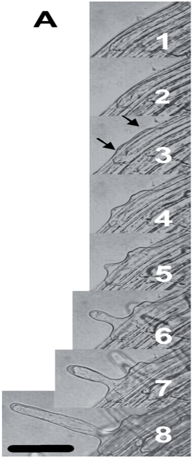


C. Grierson, 2009





J. Massuci &
J. Schiefelbein, 1994



M. Jones &
J. Smirnoff, 2006

C. Grierson, 2009

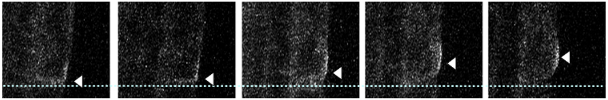
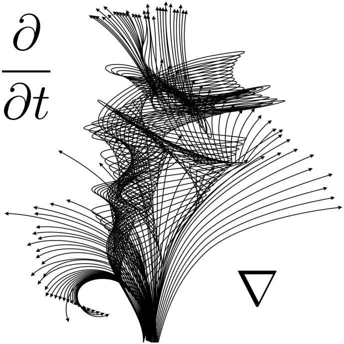
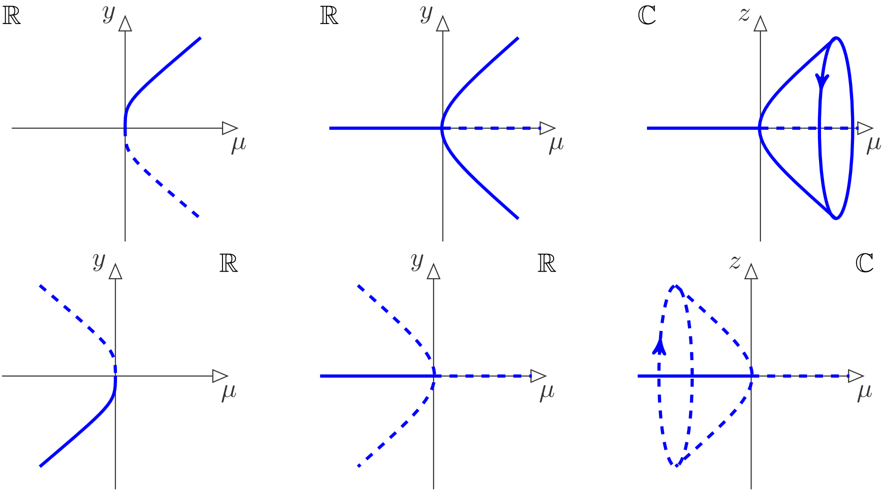


Tabla de contenidos



Bifurcaciones básicas



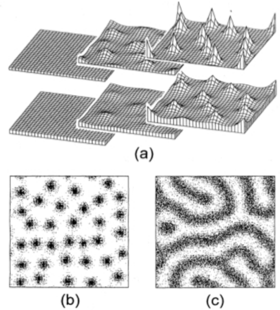
$$\dot{y} = f(y; \mu)$$

Difusión + Reacción ∼ Estabilidad temporal + Inestabilidad espacial

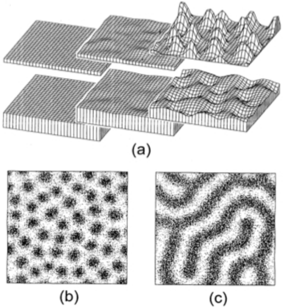
U, V : concentraciones de sustancias (bio)químicas

D_1, D_2 : coeficientes de difusión F, G : términos cinéticos

$$D_1 D_2 \ll \max\{D_1, D_2\}\,, \quad \text{sign}\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial U}\right)\left(\frac{\partial G}{\partial V}\right)\right\} < 0\,.$$



Activador-inhibidor



Activador-substrato

Koch & Meinhardt , 1994

Bifurcación de Turing

Ecuación de Swift–Hohenberg:

$$U_t = -\frac{\delta \mathcal{E}_{ij}}{\delta U}\,,$$

$$\mathcal{E}_{35}(U) = \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{[(1+\partial_{yy})U]^2}{2} + \frac{\mu U^2}{2} - \frac{\nu U^4}{4} + \frac{U^6}{6} \right] dy\,,$$

$$\mathcal{E}_{23}(U) = \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{[(1+\partial_{yy})U]^2}{2} + \frac{\mu U^2}{2} - \frac{\nu U^3}{3} + \frac{U^4}{4} \right] dy\,.$$

La ecuación de estados (dinámica espacial):

$$\frac{\delta \mathcal{E}_{ij}}{\delta U} = -(1+\partial_{yy})^2 U - \mu U + \nu U^{3,2} - U^{5,3} = 0\,,$$

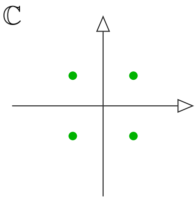
☛ $$\mathbf{u}' = \mathbf{f}(\mathbf{u};\mu)\,, \quad \mathbf{u} = [U, U_y, U_{yy}, U_{yyy}]^T\,,$$

☛ $$\mathcal{R}^2 = \mathbb{I}\,, \quad \mathcal{R}\mathbf{f}(\mathbf{u};\mu) = -\mathbf{f}(\mathcal{R}\mathbf{u};\mu)\,.$$

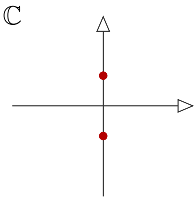
Bifurcación de Hamilton–Hopf

CON energía asociada

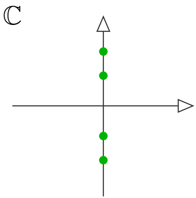
$\mu < 0$

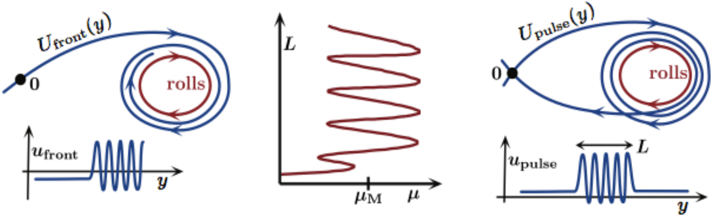


$\mu = 0$



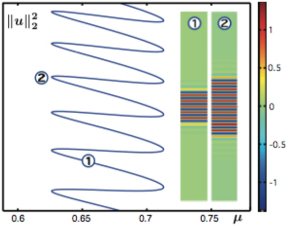
$\mu > 0$

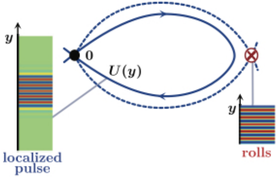




Avitabile *et al.*, 2010

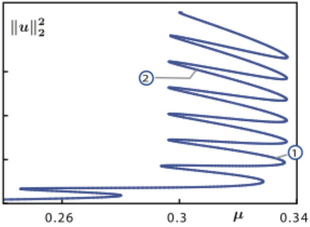
Bifurcación de Hamilton–Hopf

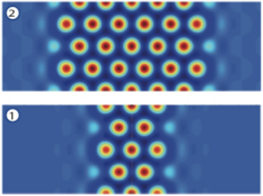




$\mathcal{E}_{35}(U)$

Avitabile *et al.*, 2010





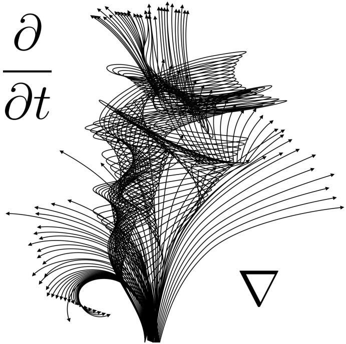
$\mathcal{E}_{23}(U)$

Lloyd *et al.*, 2008

CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Bifurcación de Hamilton–Hopf

Tabla de contenidos



CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

$$U_t = D_1\Delta U + \overbrace{k_2 U^2 V - (c+r)U + hV}^{\text{Reacción}}\,,$$

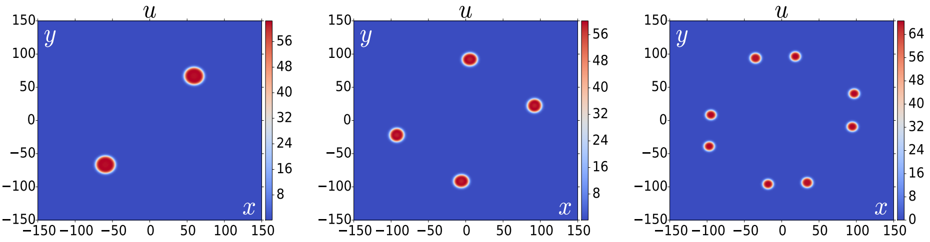
$$V_t = \underbrace{D_2\Delta V}_{\text{Difusión}} - k_2 U^2 V + cU - hV + b\,.$$

- Invariante ante traslaciones en el espacio.
- Reversibilidad espacial:

$$[U_x, V_x]^T \to [-U_x, -V_x]^T \quad \text{y} \quad [U_y, V_y]^T \to [-U_y, -V_y]^T\,,$$
$$x \to -x \quad \text{y} \quad y \to -y\,.$$

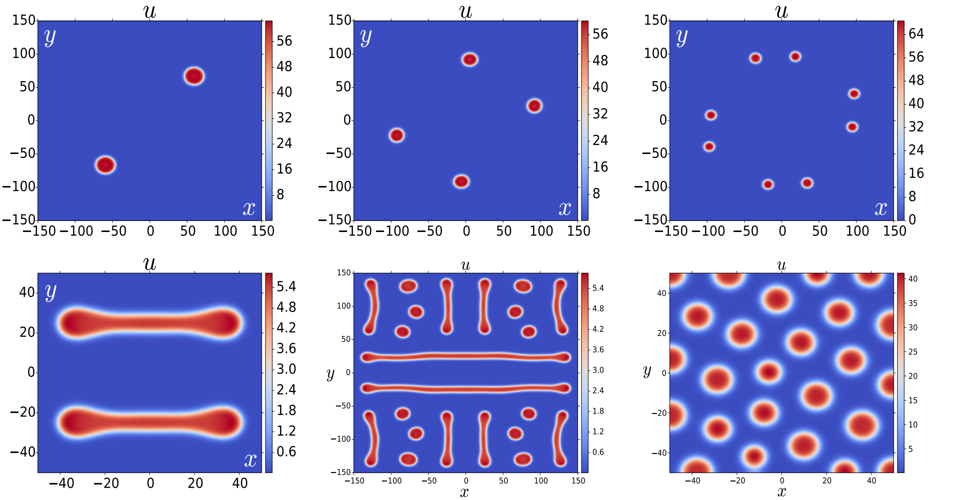
- Estado de equilibrio único: $[U_0, V_0]^T$.
- No tiene energía asociada.
- Transición de criticalidad en bifurcaciones de Turing (tenedor).

CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS



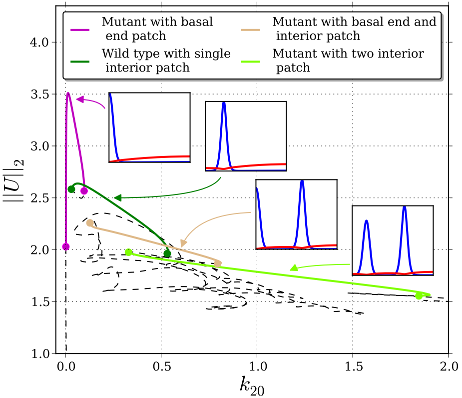
... junto con A. Champneys
Phys. Rev. E **90**, 032923 (2014).

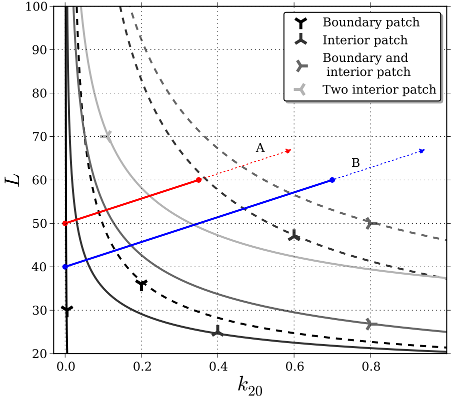
CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS



... junto con A. Champneys
Phys. Rev. E **90**, 032923 (2014).

CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

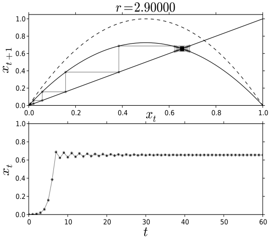




... junto con A. Champneys, C. Grierson & M. Ward
SIAM J. Appl. Dyn. Syst. **13(1)**, pp. 210–248 (2014).

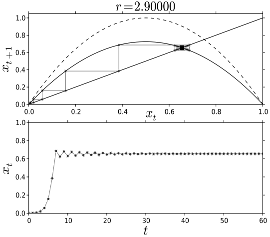
CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

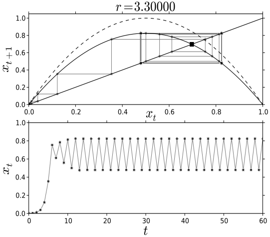
Una población de cerdos



$$x_{t+1} = r x_t (1 - x_t)\,, \quad 0 \leq r \leq 4\,.$$

Una población de cerdos

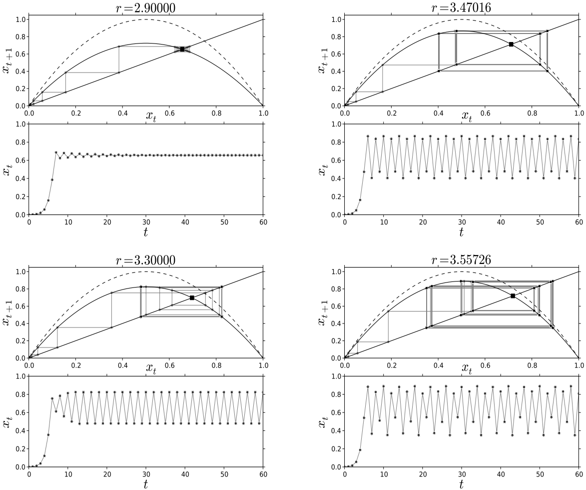




$$x_{t+1} = r x_t (1 - x_t)\,, \quad 0 \le r \le 4\,.$$

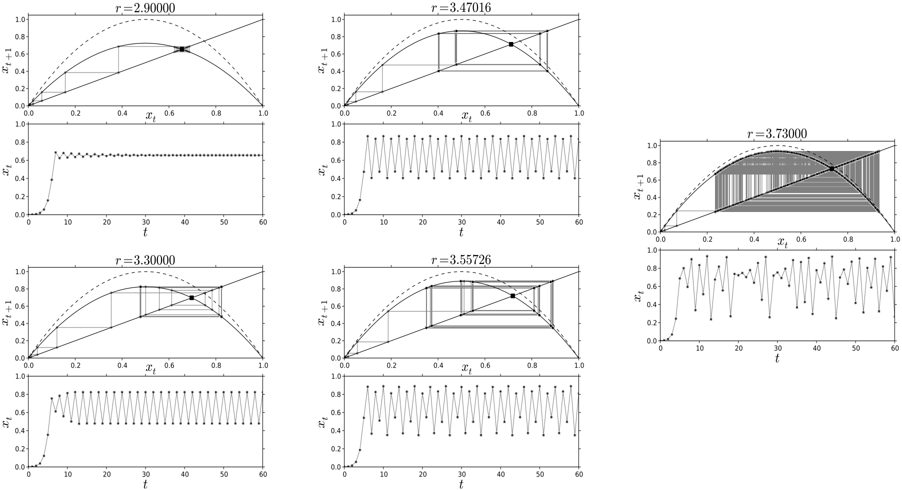
CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Una población de cerdos



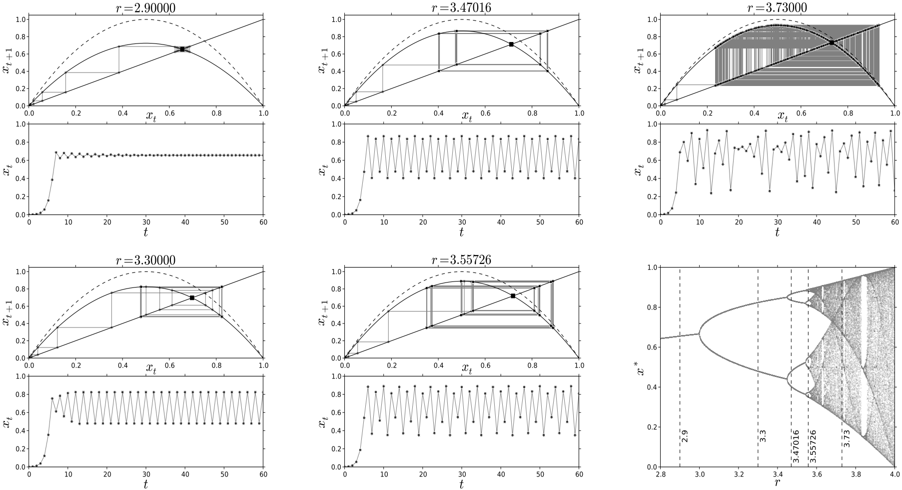
$$x_{t+1} = r x_t (1 - x_t)\,, \quad 0 \le r \le 4\,.$$

Una población de cerdos



$$x_{t+1} = r x_t (1 - x_t)\,, \quad 0 \le r \le 4\,.$$

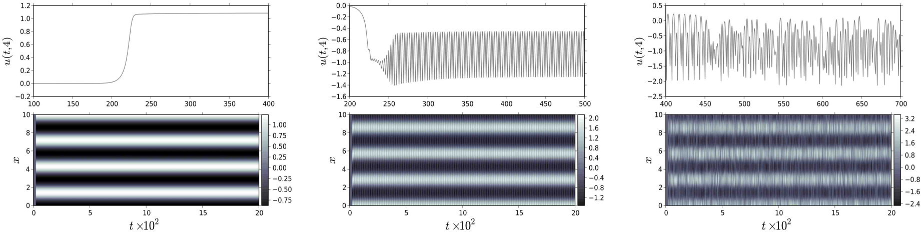
Una población de cerdos



$$x_{t+1} = r x_t (1 - x_t)\,, \quad 0 \leq r \leq 4\,.$$

CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

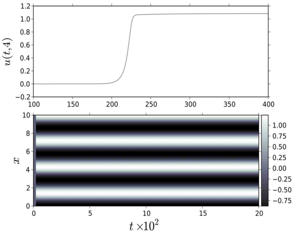
Ruta al caos Ruelle–Takens–Newhouse

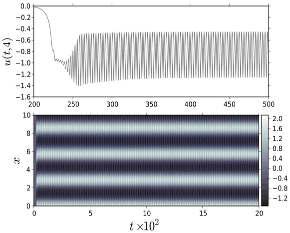


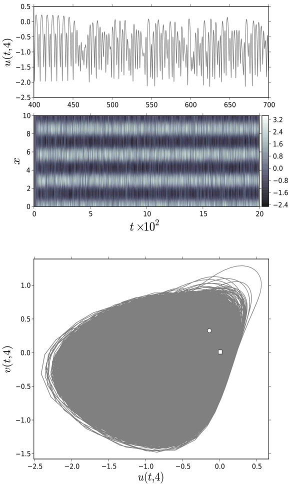
Aragón *et al.*, 2012

Caos: ¿un orden para el desorden?,
SAHUARUS, Revista de Matemáticas, Depto. de Mat.,
U. de Sonora (por aparecer).

Ruta al caos Ruelle–Takens–Newhouse



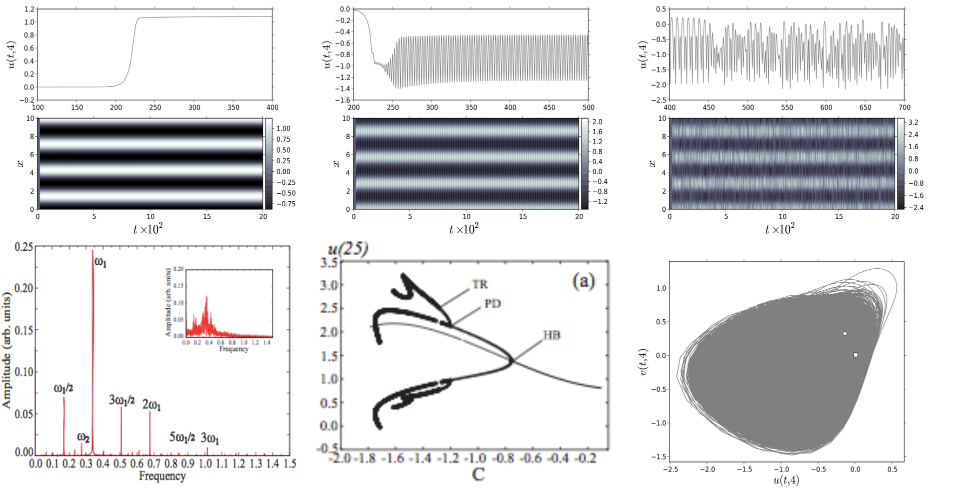




Aragón *et al.*, 2012

Caos: ¿un orden para el desorden?,
SAHUARUS, Revista de Matemáticas, Depto. de Mat.,
U. de Sonora (por aparecer).

Ruta al caos Ruelle–Takens–Newhouse

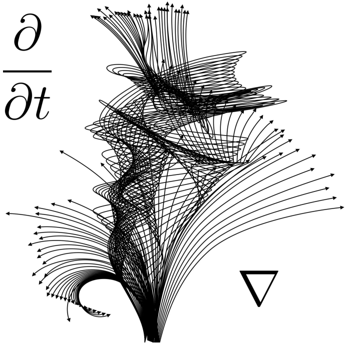


Aragón *et al.*, 2012

Caos: ¿un orden para el desorden?,
SAHUARUS, Revista de Matemáticas, Depto. de Mat.,
U. de Sonora (por aparecer).

CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Tabla de contenidos



CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

- Los sistemas dinámicos (discretos o continuos) pueden arrojar luz al entendimiento de fenómenos biológicos.
- Las bifurcaciones son fenómenos dinámicos clave para el entendimiento de procesos que experimentalmente son inaccesibles.
- No siempre es posible asociar un funcional de energía.
- La descripción de fenómenos biológicos pueden ser descritos por ingredientes de naturaleza no-homogénea en un sistema dinámico.
- ¿Cómo incorporar hipótesis más realistas en estos sistemas? Procesos de difusión heterogéneos, propiedades geométricas, interacciones simultáneas en diversas escalas espacio-temporales. . . .
- **Becas de elaboración de tesis de licenciatura para este año.**

CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Alberto Montt