La ley arcoseno en caminatas aleatorias, movimiento browniano y en el proceso Poisson compuesto

Gerónimo F. Uribe

CAPÍTULO 1

Las caminatas aleatorias y la ley arcoseno

1.1. Introducción

En este capítulo estudiaremos un problema relacionado con el propuesto en la introducción. Primero en el caso más sencillo que se puede presentar, a saber, el de la caminata aleatoria simple. El estudio de este ejemplo, aparte de proporcionarnos una distribución importante, nos ayudará a encontrar la solución para el problema original. Seguido de esto, se presenta un estudio de un problema análogo pero para caminatas aleatorias más generales, para finalmente obtener algunos teoremas sobre límites débiles haciendo algunos supuestos sobre la distribución que gobierna los saltos de las caminatas aleatorias. En ambos casos, el estudio de las variables aleatorias involucradas se hace mediante análisis combinatorio y a través de las funciones generadoras de ciertas sucesiones de probabilidades, ya que estas funciones nos sirven para representar de manera más compacta a las sucesiones y nos ayudan a obtener ciertas relaciones que éstas satisfacen.

Una caminata aleatoria es uns sucesión de variables aleatorias reales $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ tal que $S_0 = 0$ y las variables aleatorias $(S_i - S_{i-1})_{i=1}^{\infty}$ son independientes e idénticamente distribuidas. Si $X_i = S_i - S_{i-1}$, entonces a la distribución de X_i, que es independiente de i, y a la que daremos el nombre de distribución del salto, gobierna a la caminata aleatoria y las características de esta última se obtienen a través del estudio de dicha distribución. Si X_i tiene una distribución Bernoulli de parámetro $1/2$, es decir

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2},$$

a la caminata aleatoria se le conoce como caminata aleatoria simple y ciertas distribuciones relacionadas con esta sucesión se encuentran mediante métodos combinatorios; sin embargo, para el caso general, los métodos a utilizar generalmente son más complicados y el objetivo de su estudio es expresar la solución al problema planteado en términos de las caminatas aleatorias a través de la función de distribución. A veces tal solución es muy complicada y no es de utilidad práctica, por lo que además de la solución exacta, generalmente buscamos expresiones aproximadas más sencillas. Este enfoque se puede utilizar aún cuando la solución exacta a nuestro problema nos sea desconocida.

El problema que trataremos es el siguiente: dado un recorrido de longitud fija n de una caminata aleatoria $(S_i)_{i=0}^{\infty}$, calcular la distribución de la fracción de tiempo en el cual la caminata es positiva. Debemos precisar el significado de la frase anterior, puesto que no se trata de un proceso a tiempo continuo como el proceso Poisson. Una interpretación sencilla es la siguiente: si $\mathbf{1}_A$ denota a la función indicadora del conjunto A,[1] encontrar la distribución de

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{1}_{(S_n>0)},$$

que representa una medida discreta de la cantidad que nos interesa. Este problema se trata para caminatas aleatorias arbitrarias. Sin embargo, ya que la caminata aleatoria simple no cruza el eje del tiempo sin pasar por el cero, esto nos da la pauta para estudiar otra variable aleatoria que también se puede interpretar como la referida en el problema planteado al principio del párrafo: si definimos

$$Y_t = (1-(t-[t]))\,S_{[t]} + (t-[t])\,S_{[t]+1},$$

que se construye a partir de una caminata aleatoria $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ interpolando linealmente entre los puntos (n, S_n), encontrar la distribución de

$$\frac{1}{n}\int_0^n \mathbf{1}_{(Y_t>0)}\,dt,$$

lo cual se hará en el caso de la caminata aleatoria simple.

1.2. La caminata aleatoria simple y la ley arcoseno

Como se mencionó anteriormente, lo primero que haremos será encontrar la distribución de la variable aleatoria

$$F_n = \frac{1}{n}\int_0^n \mathbf{1}_{(Y_t>0)}\,dt,$$

donde la caminata aleatoria es simple, para lo cual utilizaremos el que esta caminata aleatoria no cambia de signo sin tomar el valor 0, y que al tomar el valor cero, la caminata vuelve a empezar. Lo que haremos será análogo al análisis del primer paso: nos fijaremos en el primer regreso a 0 dentro de los primeros n pasos (o en n, si la caminata aleatoria no se hace cero en los primeros n pasos.) Es por esto que el primer paso hacia la solución del problema será encontrar la distribución del primer regreso a cero para la caminata aleatoria simple.

Se decidió presentar el método clásico, que consiste en hacer análisis combinatorio, así como el método de la función generadora. Este último nos permitirá conocer la distribución de la variable aleatoria F_n, puesto que un análisis combinatorio se vuelve más complicado. Para la caminata aleatoria simple, nos aprovechamos de la solución exacta como función de n para encontrar una distribución límite que nos permite aproximar las probabilidades asociadas a la distribución de F_n mediante el cálculo de una integral. Es

[1] No se utiliza el nombre de función característica, pues éste tiene otra acepción dentro de la teoría de la probabilidad.

importante que para la caminata aleatoria simple, podemos calcular explícitamente la distribución de F_n.

1.2.1. El primer regreso a cero.

1.2.1.1. Método Combinatorio. Notemos que la evolución de la caminata aleatoria hasta el tiempo n queda determinada por el camino que sigue. Definimos a un camino como un conjunto de puntos

$$\{(i, j_i) : i = 0 \dots n\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{Z},$$

para el cual

$$j_i = j_{i-1} \pm 1,$$

con $i = 2 \dots n$.[2] Así, para encontrar la probabilidad de que la evolución de la caminata aleatoria simple hasta el tiempo n tenga cierta propiedad, una posibilidad es encontrar el número de caminos para los cuales se cumple dicha propiedad y multiplicar por $1/2^n$, que es la probabilidad de que la caminata siga un camino específico durante n pasos.[3] Éste es un método combinatorio.

Denotaremos por T el tiempo del primer regreso a cero y por $C_n(p)$ el número de caminos de n pasos con la propiedad p. Es claro que el primer regreso a cero ocurre necesariamente en un número par de realizaciones y que es mayor o igual a 2. Por otro lado,

$$\mathbb{P}(T = n) = C_n(S_1 \neq 0, \dots S_{n-1} \neq 0, S_n = 0) / 2^n, \quad n \geq 2.$$

Para calcular la probabilidad del evento $\{T = n\}$, sólo debemos de contar el número de caminos que no tocan cero más que al tiempo cero y al tiempo n. Como cualquiera de estos caminos yace íntegramente por arriba del eje del tiempo (eje de la abscisa) o por debajo del mismo, y más aún, como el número de caminos que yace por debajo del eje del tiempo es igual al número de caminos por encima del mismo, surge la igualdad

$$C_n(S_i \neq 0, i = 1 \dots n-1, S_n = 0) = 2C_n(S_i > 0, i = 1 \dots n-1, S_n = 0).$$

Notemos que a cada camino de n pasos

$$\{(i, j_i) : i = 0 \dots n\}$$

para el cual

1. $j_i > 0$, $i = 1 \dots n-1$ y
2. $j_n = 0$

[2] En la pareja ordenada (i, j_i) perteneciente a un camino, i es el número de pasos y j_i es la posición de la caminata aleatoria.

[3] Pues es igual al inverso de la cantidad de caminos que la caminata puede seguir y bajo las condiciones impuestas, los caminos a seguir son equiprobables.

le podemos asociar un camino de $n-2$ pasos

$$\{(i, j_i') : i = 0 \dots n-2\}$$

tal que

1. $j_0' = 1$,
2. $j_i' > 0$ para $i = 1 \dots n-3$ y
3. $j_{n-2}' = 1$

(haciendo $j_i' = j_{i+1}$) y que esta asociación es biunívoca, de donde

$$C_n(S_i > 0, i = 1 \dots n, S_n = 0) = C_{n-2}(S_0 = 1, S_i > 0, i = 1 \dots n-3, S_{n-2} = 1)\,.$$

Consideremos ahora el total de caminos que empiezan y terminan en 1 y constan de $n-2$ pasos, éste será la suma del número de caminos positivos que empiezan y terminan en 1 y constan de $n-2$ pasos y el número de caminos que empiezan y terminan en 1, que constan de $n-2$ pasos y que en algún momento tocan el eje del tiempo, esto es

$$\begin{aligned} C_{n-2}(S_0 = 1, S_{n-2} = 1) &= C_{n-2}(S_0 = 1, S_i > 0, i = 1 \dots n-3, S_{n-2} = 1) \\ &\quad + C_{n-2}(S_0 = 1, S_{n-2} = 1, \text{ existe } i \in \{1, \dots, n-3\} \text{ con } S_i = 0)\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Podemos calcular el lado izquierdo de la ecuación anterior y mediante un argumento combinatorio, llamado Principio de Reflexión, podemos calcular el segundo sumando del lado derecho y obtener mediante su diferencia, el número de caminos que nos interesa. Vamos por pasos:

1. En general, para calcular $C_{n-2}(S_0 = k, S_{n-2} = l)$, consideremos cualquier camino que satisfaga la propiedad anterior, digamos $\{(i, j_i) : i = 0, \dots, n-2\}$. Al considerar los incrementos $j_i - j_{i-1} \in \{-1, 1\}$ para $i = 1, \dots, n-2$, vemos que la cantidad de incrementos iguales a 1 debe ser igual a $((l-k) + (n-2))/2$,[4] mientras que la cantidad de incrementos iguales a -1 debe ser igual a $n-2$ menos la anterior cantidad. Esto es porque la diferencia entre la cantidad de incrementos iguales a 1 y la cantidad de incrementos iguales a -1 debe ser igual a $k-l$ y la suma de las dos cantidades anteriores debe ser igual a $n-2$. Por otro lado, podemos recuperar al camino a partir de los incrementos, de manera única. Esto quiere decir que $C_{n-2}(S_0 = k, S_{n-2} = l)$ es igual a la cantidad de vectores $(x_1, \dots, x_{n-2}) \in \{-1, 1\}^{n-2}$ (en los que pensaremos como los incrementos) para las cuales la cantidad de entradas iguales a 1 sea igual $((l-k) + (n-2))/2$ y la cantidad de entradas iguales a -1 sea igual a $n-2$ menos la cantidad anterior, que es igual a la cantidad de formas en las que podemos dividir a un conjunto de $n-2$ elementos en dos subconjuntos complementarios, uno de ellos con cardinalidad $((l-k) + (n-2))/2$. Esto implica que $((l-k) + (n-2))/2$ debe ser

[4] Si $((l-k) + (n-2))/2$ no es un entero no negativo, entonces $C_{n-2}(S_0 = k, S_{n-2} = l) = 0$.

un entero positivo para que $C_{n-2}(S_0 = k, S_{n-2} = l)$ sea distinto de cero. En este caso, obtenemos la igualdad

(2) $$C_{n-2}(S_0 = k, S_{n-2} = l) = \binom{n-2}{\frac{(l-k)+(n-2)}{2}}.$$

Por medio de (2), se llega a la igualdad

(3) $$\mathbb{P}(S_n = l) = C_n(S_0 = 0, S_n = l)\,/2^n = \binom{n}{\frac{l+n}{2}}/2^n$$

cuando $(l+n)/2$ es un entero no negativo y $\mathbb{P}(S_n = l)$ es cero en otro caso.

2. Por otro lado, para calcular

$$C_{n-2}(S_0 = 1, S_{n-2} = 1, \text{ existe } i \in \{1, \ldots, n-3\} \text{ con } S_i = 0)\,,$$

sea $\{(i, j_i) : i = 0 \ldots n-2\}$ un camino de 1 a 1 que toca el eje del tiempo, esto es,

a) $j_0 = 1 = j_{n-2}$ y

b) existe $i \in \{1, \ldots, n-3\}$ tal que $j_i = 0$.

Consideremos

$$k = \text{mín}\,\{m \in \{1, \ldots, n-3\} : j_m = 0\}\,,$$

este último conjunto es no vacío ya que i pertenece a él. Si ahora reflejamos el camino con respecto al eje del tiempo antes del momento k, obtenemos un camino que va de -1 a 1 en $n-2$ pasos, como se puede apreciar en la Figura 1. Hemos considerado la transformación

$$\{(i, j_i) : i = 0 \ldots n-2\} \mapsto \{(i, j_i') : i = 0 \ldots n-2\}\,,$$

donde

a) $j_i' = -j_i$ si $i < k$ y

b) $j_i' = j_i$ si $i \geq k$,

por lo que

a) $j_0' = -j_0 = -1$ pues $k > 0$ y

b) $j_{n-2}' = j_{n-2}$ ya que $k < n-2$

y para verificar que es un camino, notemos que

$$j_{k+1}' = j_{k+1} = j_k \pm 1 = \pm 1 = j_k' \pm 1$$

y como

$$j_k = j_k' = 0 \text{ y } j_{k-1} = 1,$$

entonces

$$j_{k-1}' = -1 \text{ y } j_k = j_{k-1}' + 1.$$

Esta asociación es biunívoca, pues dado un camino que va de -1 a 1, podemos considerar el primer instante en el que toca cero y aplicar el mismo procedimiento de reflexión para obtener un camino de 1 a 1 que toca cero, notando que al aplicar

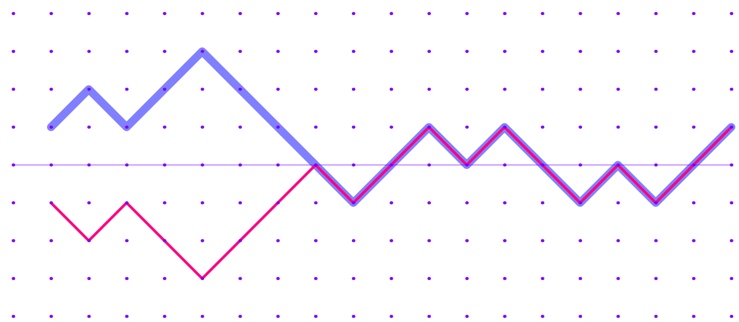

FIGURA 1. Ilustración del Principio de Reflexión

ambas asociaciones, la primera seguida de la segunda o la segunda seguida de la primera, obtenemos el camino con el que empezamos.

Así, hemos visto que

$$C_{n-2}(S_0=1, S_{n-2}=1, \text{ existe } i \in \{1,\dots,n-3\} \text{ con } S_i=0) = C_{n-2}(S_0=-1, S_{n-2}=1).$$

Para que $C_{n-2}(S_0=-1, S_{n-2}=1)$ sea mayor a cero es necesario que $n/2$ sea un entero mayor o igual a 2, de acuerdo al inciso anterior. En ese caso, de acuerdo a (2), se obtiene

$$C_{n-2}(S_0=1, S_{n-2}=1, \text{ existe } i \in \{1,\dots,n-3\} \text{ con } S_i=0) = \binom{n-2}{\frac{n}{2}},$$

de lo cual, al considerar (1) y simplificar la expresión resultante:

$$\begin{aligned} C_{n-2}(S_0=1, S_i>0, i=1\dots n-3, S_{n-2}=1) &= \binom{n-2}{\frac{n-2}{2}} - \binom{n-2}{\frac{n}{2}} \\ &= \frac{2}{n}\binom{n-2}{\frac{n-2}{2}} \end{aligned}$$

y así, finalmente obtenemos, para n para,

$$\mathbb{P}(T=n) = \frac{2}{2^n}\frac{2}{n}\binom{n-2}{\frac{n-2}{2}}.$$

Para concluir con el método combinatorio, se pide al lector comprobar la igualdad

$$\frac{2}{2^n}\frac{2}{n}\binom{n-2}{\frac{n-2}{2}} = \frac{1}{n}\mathbb{P}(S_{n-2}=0)\,,$$

válida para $n \geq 2$ par como una consecuencia de (3). Esta igualdad nos relaciona la densidad discreta de T con la de S_n y se obtendrá de nueva cuenta a continuación.

1.2.1.2. Método de la Función Generadora. Sean

$$u_n = \mathbb{P}(S_n = 0)$$

y

$$f_n = \mathbb{P}(T = n)$$

para $n \in \mathbb{N}$. Notemos que $u_0 = 1$, que $u_n = f_n = 0$ si n es impar y que para $n \geq 1$,

$$u_{2n} = \sum_{i=1}^{n} f_{2i} u_{2(n-i)},$$

puesto que $S_{2n} = 0$ ($n \geq 1$) si y sólo si existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que el primer regreso a cero ocurre en el instante $2i$ y de ahí, independientemente de lo ocurrido anteriormente, debemos regresar a cero en $2(n-i)$ pasos. Si

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{2n} s^{2n}$$

es la función generadora de $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ y

$$P(s) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{2n} s^{2n}$$

es la de $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, entonces

$$\begin{aligned} P(s) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n} s^{2n} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} s^{2n} \sum_{i=1}^{n} f_{2i} u_{2(n-i)} \end{aligned}$$

Notemos que la última serie en la ecuación anterior es el producto de $P(s)$ y $F(s)$, de donde $P(s) = 1 + P(s)F(s)$.

Para calcular $P(s)$, utilizamos (3) y la definición de u_n para obtener:

$$\begin{aligned} u_{2n} &= \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} = \frac{1}{2^n n!} \frac{\prod_{i=0}^{n-1}(2i+1) \prod_{i=1}^{n}(2i)}{2^n \prod_{i=1}^{n} i} \\ &= \frac{1}{2^n n!} \prod_{i=0}^{n-1}(2i+1) = \frac{(-1)^n}{n!} \prod_{i=0}^{n-1}(-1/2 - i). \end{aligned}$$

Si se define para a un número real arbitrario,

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!},$$

entonces

$$u_{2n} = (-1)^n \binom{-1/2}{n}.$$

Podemos utilizar la serie binóminca, que se puede consultar en [**1**], para obtener

$$P(s) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{2n} s^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} s^{2n} (-1)^n \binom{-1/2}{n} = \left(1 - s^2\right)^{-1/2}$$

de donde,

$$F(s) = 1 - (1 - s^2)^{1/2}.$$

Si utilizamos de nueva cuenta la serie binómica, notemos que

$$\begin{aligned} F(s) &= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n s^{2n} \binom{1/2}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} s^{2n} \binom{1/2}{n}, \end{aligned}$$

pero al analizar con más detalle, se observa que

$$\begin{aligned} (-1)^{n+1} \binom{1/2}{n} &= \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \prod_{i=0}^{n-1} (1/2 - i) \\ &= \frac{-1}{n!2^n} \prod_{i=0}^{n-1} (2i - 1) \\ &= \frac{1}{n!2^n} \prod_{i=1}^{n-1} (2i - 1) \\ &= \frac{1}{n!2^n} \prod_{i=1}^{n-1} (2i - 1) \frac{\prod_{i=1}^{n-1} 2i}{(n-1)!2^{n-1}} \\ &= \frac{1}{2^{2n-1} n} \frac{(2(n-1))!}{(n-1)!^2} \\ &= \frac{1}{2n} u_{2(n-1)}, \end{aligned}$$

donde la última igualdad es consecuencia de la definición de u_n y de la expresión que se obtiene para u_n al utilizar (3). Esto significa que

$$\sum_{n=1}^{\infty} s^{2n} f_{2n} = F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} s^{2n} \frac{1}{2n} u_{2(n-1)},$$

de lo cual se infiere la igualdad $f_{2n} = \frac{1}{2n} u_{2(n-1)}$, que coincide con la expresión que encontramos previamente.

1.2.2. La ley Arcoseno. Ahora calcularemos la distribución de F_n, la variable aleatoria definida en la Sección 1.2, aunque sólo sea para n par, puesto que utilizaremos al primer regreso a cero para la caminata aleatoria simple y esta variable siempre es par. Además, como veremos, la distribución de F_n se vuelve muy complicada cuando n es grande, por lo que el hecho de que las distribuciones de F_n converjan a una distribución cuando n tiende a infinito se vuelve muy conveniente. Estos son los dos aspectos de la caminata aleatoria simple que exploraremos a continuación, el primero mediante el uso de funciones generadoras y el segundo mediante la aproximación de Stirling, que si recordamos, es la que nos proporciona una aproximación para el factorial, de donde se obtiene la aproximación normal para la distribución binomial de parámetros n y p cuando n es grande, distribución relacionada con la de S_n, puesto que $(S_n + n)/2$ tiene distribución binomial de parámetros n y $p = 1/2$. Esto se puede verificar ya que

$$(S_n + n)/2 = \sum_{i=1}^{n} (S_i - S_{i-1} + 1)/2,$$

donde $\{(S_i - S_{i-1} + 1)/2\}_{i=1}^{n}$ son independientes y su distribución común es Bernoulli de parámetro $1/2$.

1.2.2.1. La distribución Arcoseno discreta. Calcularemos ahora la probabilidad de que la caminata aleatoria se encuentre $2k$ unidades de tiempo en el lado positivo en un recorrido de $2n$ pasos. Diremos que la caminata pasa una unidad de tiempo del lado positivo en el intevalo $[m, m+1]$ si S_m es positivo o S_{m+1} es positivo. Con esta definición, la probabilidad que deseamos calcular es $\mathbb{P}(F_{2n} = k/n)$. Además, una caminata de $2n$ pasos se encuentra durante $2k$ unidades de tiempo en el lado positivo si y sólo si su reflexión a lo largo del eje del tiempo pasa $2(n-k)$ unidades de tiempo en el lado positivo (o la caminata pasa $2(n-k)$ unidades de tiempo en el lado negativo.) Si denotamos por $u_{2k,2n}$ a la probabilidad que nos interesa, la anterior afirmación se reduce a la igualdad $u_{2k,2n} = u_{2(n-k),2n}$, por lo que la densidad discreta de la cantidad de tiempo en el que la caminata aleatoria simple es positiva es simétrica alrederor del punto n.

Si una caminata de $2n$ pasos se encuentra durante $2k$ unidades de tiempo en el lado positivo y $0 < k < n$, entonces necesariamente pasa por el cero, digamos en el momento $2i$. Si S_1 es positivo, se sigue que la caminata debe pasar $2(k-i)$ unidades de tiempo en el lado positivo entre el momento $2i$ y el $2n$, lo cual sucede con probabilidad

$$\frac{1}{2} f_{2i} u_{2(k-i),2(n-i)},$$

o si S_1 es negativo, debe pasar $2k$ unidades de tiempo en el lado positivo entre los instantes $2i$ y $2n$, que sucede con probabilidad

$$\frac{1}{2} f_{2i} u_{2k,2(n-i)}.$$

Aquí ocupamos el que la caminata aleatoria simple vuelva a empezar la primera vez que llega a cero. Utilizando la aditividad finita de la probabilidad, ésto da lugar a la relación

$$u_{2k,2n} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f_{2i}u_{2(k-i),2(n-i)} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f_{2i}u_{2k,2(n-i)} \tag{4}$$

válida para $0 < k < n$ e incorrecta para el caso $k = 0$ ó $k = n$, puesto que no contempla la posibilidad de que la caminata regrese a cero por primera vez en un instante posterior al $2n$. Esto se remedia facilmente, pues una caminata de $2n$ pasos se encuentra durante cero unidades de tiempo en el lado positivo sin regresar a cero en ese lapso con probabilidad $\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} f_{2(n+k)}$. Análogamente, se tiene una expresión idéntica para el caso en el que pasa $2n$ unidades de tiempo en el lado positivo y así, se obtiene:

$$u_{0,2n} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f_{2i}u_{-2i,2(n-i)} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f_{2i}u_{0,2(n-i)} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} f_{2(n+k)}$$

$$u_{2n,2n} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f_{2i}u_{2(n-i),2(n-i)} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f_{2i}u_{2n,2(n-i)} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} f_{2(n+k)}.$$

Notemos que el primer sumando del lado derecho de la primera igualdad es cero, así como el segundo sumando del lado derecho de la segunda igualdad, pero se incluyen para preservar cierta analogía con el caso $0 < k < n$.

Si ahora consideramos

$$U_{2n}(s) = \sum_{k=0}^{n} s^{2k}u_{2k,2n},$$

notemos que de la relación (4) se tiene que

$$\begin{aligned} U_{2n}(s) &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{n} s^{2k}f_{2i}u_{2(k-i),2(n-i)} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{n} s^{2k}f_{2i}u_{2k,2(n-i)} \\ &\quad + \frac{1}{2}(1+s^{2n})\sum_{k=1}^{\infty} f_{2(n+k)} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} s^{2i}f_{2i}U_{2(n-i)}(s) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f_{2i}U_{2(n-i)}(s) \\ &\quad + \frac{1}{2}(1+s^{2n})\sum_{k=1}^{\infty} f_{2(n+k)}, \end{aligned} \tag{5}$$

donde la última igualdad se obtiene al cambiar el orden de las dos sumas.

Calculemos ahora la función generadora conjunta $G(s,t)$ de $\{u_{2k,2n}\}$ valuada en (s,t), igual a

$$G(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} u_{2k,2n} s^{2k} t^{2n}.$$

La función G valuada en (s,t) no es más que la función generadora de $\{U_{2n}(s)\}_{n\in\mathbb{N}}$ valuada en t (definiendo $U_0 = 0$), que podemos encontrar al multiplicar (5) por t^{2n} y sumar n desde 1 hasta ∞:

$$\begin{aligned}
2G(s,t) &= 2\sum_{n=1}^{\infty} t^{2n} U_{2n}(s) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} t^{2n} \sum_{i} s^{2i} f_{2i} U_{2(n-i)}(s) + \sum_{n=1}^{\infty} t^{2n} \sum_{i=1}^{n} f_{2i} U_{2(n-i)}(s) \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} t^{2n} \sum_{k=1}^{\infty} f_{2(n+k)} + \sum_{n=1}^{\infty} t^{2n} s^{2n} \sum_{k=1}^{\infty} f_{2(n+k)}.
\end{aligned} \tag{6}$$

La primera suma que aparece en el lado derecho de la última igualdad en (6) es igual al producto de la función generadora de $\{f_{2n}\}$ valuada en st (que denotaremos por $F(st)$) con la función generadora de $\{U_{2n}(s)\}$ valuada en t (que es igual a $G(s,t)$). El segundo sumando del lado derecho de la última igualdad en (6) corresponde al producto de la función generadora de $\{f_n\}$ valuada en t y la generadora de $\{U_n(s)\}$ valuada en t (igual a $G(s,t)$). El tercer sumando se calcula a continuación:

$$\begin{aligned}
\sum_{n} t^{2n}(f_{2(n+1)} + f_{2(n+2)} + \cdots) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=n+1}^{\infty} t^{2n} f_{2k} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n=0}^{k-1} t^{2n} f_{2k} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1-t^{2k}}{1-t^2} f_{2k} \\
&= \frac{1-F(t)}{1-t^2}.
\end{aligned}$$

Se ha utilizado el hecho de que $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_{2n} = 1$, igualdad que se justifica pues la anterior suma es igual a $F(1)$, donde F es la función generadora obtenida en la subsección anterior. La cuarta suma es parecida a la tercera, pero debemos substituir t por st. Así, hemos obtenido la relación:

$$2G(s,t) = F(st)G(s,t) + F(t)G(s,t) + \frac{1-F(t)}{1-t^2} + \frac{1-F(st)}{1-s^2t^2},$$

de donde

$$G(s,t) = (1-t^2)^{-1/2}(1-s^2t^2)^{-1/2}.$$

Finalmente, la probabilidad $u_{2k,2n}$ es el coeficiente de $s^{2k}t^{2n}$ en la expansión en serie de potencias de la función G, que se puede obtener al utilizar la serie binómica:

$$\begin{aligned} G(s,t) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} \binom{-1/2}{n} (-1)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} s^{2n}t^{2n} \binom{-1/2}{n} (-1)^n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} \sum_{k=0}^{n} s^{2k} \binom{-1/2}{k}\binom{-1/2}{n-k}. \end{aligned}$$

Este último resultado nos dice que la probabilidad buscada $u_{2k,2n}$ es igual a

$$(-1)^n \binom{-1/2}{k}\binom{-1/2}{n-k}$$

y como comprobamos en la sección anterior la igualdad

$$(-1)^k \binom{-1/2}{k} = \mathbb{P}(S_{2k}=0)\,,$$

podemos finalmente encontrar una expresión para la probabilidad de que la caminata aleatoria pase $2k$ unidades de tiempo en el lado positivo en un trayecto de $2n$ pasos:

$$u_{2k,2n} = \mathbb{P}(S_{2k}=0)\,\mathbb{P}\big(S_{2(n-k)}=0\big)\,. \tag{7}$$

De aquí que la fracción de tiempo que nuestra caminata aleatoria de longitud $2n$ pasa en el lado positivo (la variable aleatoria F_{2n}) tiene la distribución arcoseno discreta,[5] dada por

$$u_{2k,2n} = \mathbb{P}\left(F_{2n} = \frac{k}{n}\right) = \mathbb{P}(S_{2k}=0)\,\mathbb{P}\big(S_{2(n-k)}=0\big)\,.$$

1.2.2.2. Convergencia a la distribución arcoseno. Así como la fórmula de Stirling nos provee de una aproximación para probabilidades relacionadas con la distribución binomial, al aproximar la función factorial, que toman forma en el teorema límite central para la caminata aleatoria simple, también la podemos utilizar para aproximar a la familia de distribuciones que encontramos en el inciso anterior. La fórmula de Stirling establece que

$$n! \sim \sqrt{2\pi} n^{n+1/2} e^{-n},$$

cuyo significado es que el cociente de ambas cantidades converge a 1 cuando $n \to \infty$, de lo cual se sigue:

$$\mathbb{P}(S_{2k}=0) = \binom{2k}{k} 2^{-2k} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}\sqrt{k/n}},$$

[5] La razón por la cual se le da este nombre quedará más clara en la siguiente subsección.

por lo cual para $\varepsilon > 0$ existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $k, n-k \geq N_1$ implica que

$$(1-\varepsilon)\frac{1}{\pi n\sqrt{k/n}\sqrt{1-k/n}} \leq \mathbb{P}\left(F_{2n} = \frac{k}{n}\right) \leq (1+\varepsilon)\frac{1}{\pi n\sqrt{k/n}\sqrt{1-k/n}}.$$

Si $x, y \in (0,1)$ son tales que $x < y$, entonces

$$\mathbb{P}(F_{2n} \in (x,y)) = \sum_{\{k:k/n\in(x,y)\}} \mathbb{P}\left(F_{2n} = \frac{k}{n}\right)$$

y si $N \geq \max(N_1 x, N_1(1-y))$ y $n \geq N$, entonces $k/n \in (x,y)$ implica que $k \geq N_1$ y $n-k \geq N_1$, por lo que

$$\begin{aligned}(1-\varepsilon) \sum_{\{k:k/n\in(x,y)\}} \frac{1}{n}\frac{1}{\pi\sqrt{(k/n)(1-k/n)}} &\leq \mathbb{P}(F_{2n} \in (x,y)) \\ &\leq (1+\varepsilon) \sum_{\{k:k/n\in(x,y)\}} \frac{1}{n}\frac{1}{\pi\sqrt{(k/n)(1-k/n)}}.\end{aligned}$$

Esto implica que

$$\mathbb{P}(F_{2n} \in (x,y))$$

y

$$\sum_{\{k:k/n\in(x,y)\}} \frac{1}{n}\frac{1}{\pi\sqrt{(k/n)(1-k/n)}}$$

tienen el mismo límite cuando $n \to \infty$, que es $\int_{[x,y]} 1/\left(\pi\sqrt{t(1-t)}\right) dt$, puesto que la última expresión es casi una suma de Riemman de la función $1/\left(\pi\sqrt{t(1-t)}\right)$ para una partición de $[x,y]$ de norma menor o igual a $1/n$, donde la palabra casi se explica pues pueden faltar el primer y el último sumando (que son irrelevantes para el límite.) Hemos demostrado entonces que si $x, y \in (0,1)$ con $x < y$, entonces tiene lugar la relación

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(F_{2n} \in (x,y)) = \int_{[x,y]} \frac{1}{\pi\sqrt{t(1-t)}}\, dt.$$

La validez de esta ecuación para $x = 0$ y $y \in (0,1)$ se demuestra mediante la simetría de la densidad discreta de F_{2n} y de la función $1/\sqrt{t(1-t)}$ respecto a $1/2$, así como la igualdad (que se demuestra en el siguiente párrafo)

$$\int_{[0,1]} \frac{1}{\pi\sqrt{t(1-t)}}\, dt = 1$$

pues entonces para $y \in (0,1/2)$:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(F_{2n} \in (0,y)) &= \lim_{n\to\infty} 1/2 - 1/2\mathbb{P}(F_{2n} \in (y, y+1/2)) \\ &= 1/2 - 1/2 \int_{[y,y+1/2]} \frac{1}{\pi\sqrt{t(1-t)}}\, dt \\ &= \int_{[0,y]} \frac{1}{\pi\sqrt{t(1-t)}}\, dt.\end{aligned}$$

Para $y \in [1/2, 1]$, se aplica el resultado anterior a $y - 1/2$ y se utilizan las simetrías mencionadas anteriormente. En resumen, se tiene el siguiente teorema límite para la fracción de tiempo en el lado positivo, F_{2n}:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(F_{2n} \leq x) = \int_{[0,x]} \frac{1}{\pi\sqrt{t(1-t)}}\, dt, \quad x \in [0,1].$$

Si A es una variable aleatoria continua con densidad $\mathbf{1}_{[0,1]}(t)/\left(\pi\sqrt{t(1-t)}\right)$, el resultado anterior nos dice que F_{2n} converge a A en distribución. A la ley de la variable A se le llama distribución arcoseno, lo que explica el nombre de distribución arcoseno discreta para la ley de F_{2n}.

Para calcular de manera explícita la distribución arcoseno, utilizamos la substitución $s = t - 1/2$, que para $x \in [0,1]$ nos dice que:

$$\int_{[0,x]} \frac{1}{\pi\sqrt{t(1-t)}}\, dt = \int_{[-1/2,x-1/2]} \frac{1}{\pi\sqrt{1/4 - s^2}}\, ds$$

que es igual a $1/2 + \arcsin(2x-1)/\pi$ (esta expresión se encuentra al utilizar la substitución $s = \sin(r)/2$.) Note que esto en particular nos dice que

$$\int_{[0,1]} \frac{1}{\pi\sqrt{t(1-t)}}\, dt = \frac{\arcsin(1) - \arcsin(-1)}{\pi} = 1.$$

Podemos encontrar una expresión más sencilla para la distribución arcoseno al utilizar la formula de adición para la función seno, que establece la igualdad $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$, así como el caso particular $\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$, y que $\cos\arcsin(x) = \sqrt{1-x^2}$ para $x \in [0,1]$, pues entonces para x en el mismo rango:

$$\sin(\arcsin(2x-1) + \pi/2) = \cos\arcsin(2x-1) = 2\sqrt{x}\sqrt{(1-x)} = \sin 2\arcsin(\sqrt{x}),$$

de donde

$$\frac{\arcsin(2x-1)}{\pi} + \frac{1}{2} = \frac{2}{\pi}\arcsin(\sqrt{x}).$$

La última expresión es importante no sólo por ser más sencilla sino por razones históricas, es la forma en la que Paul Lévy presentó a esta distribución límite en relación a un problema parecido al que nosotros consideramos.

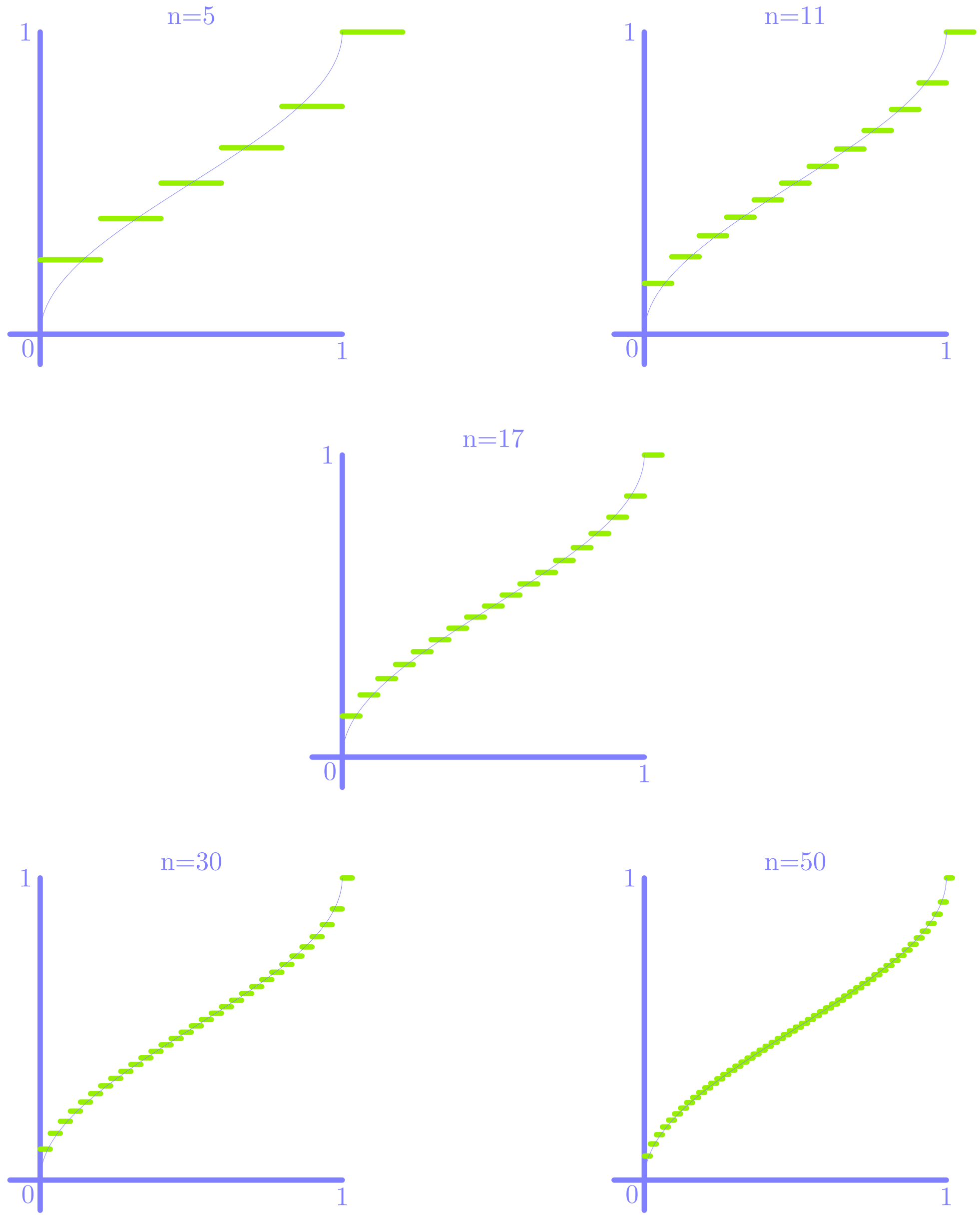

Figura 2. Ilustración del teorema límite para la caminata aleatoria simple

En la Figura 2 se puede observar la convergencia de la distribución arcoseno discreta hacia la distribución arcoseno. Se ha gráficado la distribución arcoseno discreta para los valores de $n = 5, 11, 17, 30$ y 50 junto con la distribución arcoseno. Como la densidad arcoseno se concentra en los puntos 0 y 1, lo mismo sucede con la densidad discreta de la variable aleatoria F_{2n} para n grande.

EL MINORANTE CONVEXO DE CAMINATAS ALEATORIAS

GERÓNIMO URIBE BRAVO
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
ÁREA DE LA INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA
CIRCUITO EXTERIOR, CIUDAD UNIVERSITARIA
COYOACÁN, 04510. MÉXICO, D. F.
E-MAIL: **geronimo@matem.unam.mx**

Resumen. La teoría de fluctuaciones se centra en el estudio de la relación entre la caminata aleatoria $S = (S_n, n \in \mathbb{N})$ y su mínimo acumulativo M dado por $M_n = \min_{m \leq n} S_m$.

Se presentará una transformación trayectorial de tipo combinatorio de la caminata aleatoria S que permite describir probabilísticamente a su minorante convexo. Esto da lugar a representaciones nuevas de M_n, o del lugar en que se alcanza dicho mínimo. Las representaciones permiten estudiar teóricamente o simular a dichas variables sin necesidad de generar a toda la trayectoria de la caminata.

Como un ejemplo, se dará una interpretación a la fórmula de Baxter

$$\mathbb{E}(M_n) = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} \mathbb{E}(S_m \mathbf{1}_{S_m < 0})$$

que liga a la caminata aleatoria con su mínimo acumulativo.

Abstract. Fluctuation theory is focused on the study of the relationship between random walk $S = (S_n, n \in \mathbb{N})$ and its cumulative minimum process M given by $M_n = \min_{m \leq n} S_m$.

We will present a path transformation of our random walk which allows for a probabilistic description of its convex minorant. We obtain, in particular, new representations for M_n or the place at which this minimum is achieved by the random walk. These representations have theoretical consequences as well as simulation schemes which do not need one to simulate the whole random walk path.

As an example, we will give an interpretation to Baxter's formula

$$\mathbb{E}(M_n) = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} \mathbb{E}(S_m \mathbf{1}_{S_m < 0})$$

which links random walk to its cumulative minimum.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 60G51.

Palabras Claves. Caminatas aleatorias, transformaciones trayectoriales, transformación de Vervaat.

El objetivo del presente artículo es presentar una transformación trayectorial que permite describir al minorante convexo de una caminata aleatoria. Esta transformación fue introducida en [2] para caminatas aleatorias y analizada en el contexto de procesos de Lévy y movimiento browniano en [9] y [8]. Se puede consultar también el artículo de revisión [1]. Basándonos en [2], tomaremos un punto de vista combinatorio, vía la célebre transformación trayectorial de Vervaat, para estudiar directamente a la transformación trayectorial y veremos algunas consecuencias simples pero interesantes. Como se discute en [2], esta transformación trayectorial puede proporcionar un punto de entrada distinto a la teoría de fluctuaciones de caminatas aleatorias, pues en particular, explica la independencia entre los procesos pre y post mínimo de una caminata aleatoria.

1. Caminatas aleatorias

Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias con valores en $\mathbb{R}$, mismas que asumiremos independientes e idénticamente distribuidas. Para simplificar los enunciados, asumiremos que la distribución de X_1 es continua, es decir, que

(H): $\mathbb{P}(X_1 = x) = 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$.

A partir de la sucesión X, construiremos una nueva sucesión $S_0, S_1, \ldots$ definida por

$$S_0 = 0 \quad \text{y} \quad S_n = X_1 + \cdots + X_n \text{ para } n \geq 1.$$

A la sucesión S se le conoce como sucesión de sumas parciales asociadas a la sucesión X. También se le conoce como caminata aleatoria, en cuyo caso llamamos saltos a las variables X_i. Una consecuencia importante de la hipótesis **(H)** es la siguiente propiedad, que constituye un buen ejercicio para ir adentrándose en la teoría.

Ejercicio 1.1. *Bajo la hipótesis* **H** *todos los valores $S_1, S_2, \ldots$ son distintos con probabilidad 1.*

La sucesión de sumas parciales asociada a variables independientes e idénticamente distribuidas es un objeto muy importante dentro de la probabilidad. Como ejemplo, notemos que la ley fuerte de los grandes números es la afirmación siguiente: si $\mathbb{E}(|X_i|) < \infty$ entonces la sucesión de promedios (S_n/n) converge a la media de X_1.

Tal vez sean menos conocidos los resultados sobre teoría de fluctuaciones para caminatas aleatorias. La teoría de fluctuaciones tiene que ver con otras funcionales de S_n, en particular los valores máximos de una caminata aleatoria. Uno de los pioneros en su desarrollo fué el matemático danés Erik Sparre Andersen quien sentó las bases en los artículos [4], [3] y [5]. A continuación se describen los resultados contenidos en dichos artículos.

Fijemos un umbral n y definamos a

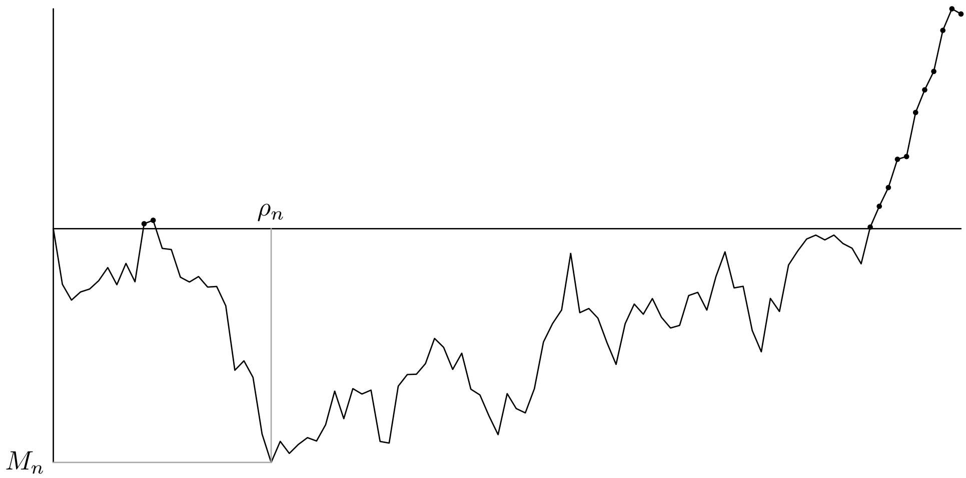

FIGURA 1. Trayectoria de 100 pasos de una caminata aleatoria con incrementos gaussianos. Los sumandos positivos se distinguen con un punto y hay 13 de ellos ($A_n = 13$).

- la cantidad de sumas parciales positivas

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{S_n > 0}$$

- el mínimo valor que toma la caminata aleatoria entre 0 y n:

$$M_n = \min_{m \le n} S_m,$$

- el máximo valor que toma la caminata aleatoria entre 0 y n:

$$M^n = \max_{m \le n} S_m,$$

- el primer instante entre 0 y n en que la caminata es igual al mínimo:

$$\rho_n = \min \{m \le n : S_m = M_n\} \text{ y}$$

- el primer instante entre 0 y n en que la caminata es igual al máximo:

$$\rho^n = \min \{m \le n : S_m = M^n\}.$$

En las Figuras 1 y 2 se pueden visualizar dos trayectorias de 100 pasos de caminatas aleatorias con incrementos gaussianos y Cauchy respectivamente, junto con su mínimo, posición del mínimo y cantidad de pasos positivos.

Dentro de los resultados obtenidos por Andersen destaca la ley arcoseno: si la caminata aleatoria es simétrica, es decir que X_1 y $-X_1$ tienen la misma

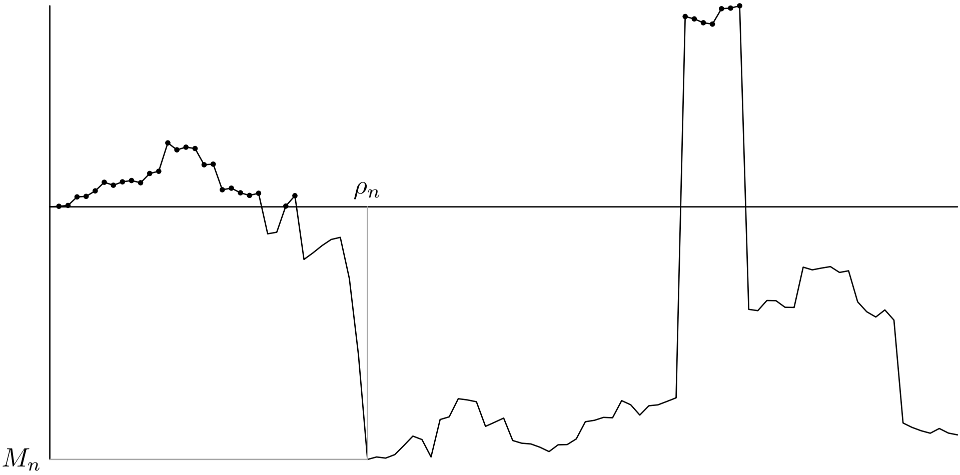

FIGURA 2. Trayectoria de 100 pasos de una caminata aleatoria con incrementos Cauchy. Los sumandos positivos se distinguen con un punto y hay 32 de ellos.

distribución, entonces

$$\mathbb{P}\left(\frac{A_n}{n} \leq x\right) \to \int_0^x \frac{1}{\pi\sqrt{y\,(1-y)}}\,dy.$$

Además:

$$\mathbb{P}\left(\frac{\rho_n}{n} \leq x\right), \mathbb{P}\left(\frac{\rho^n}{n} \leq x\right) \to \int_0^x \frac{1}{\pi\sqrt{y\,(1-y)}}\,dy.$$

Esto es, se afirma la convergencia en distribución de la fracción de sumas positivas a una variable Beta de parámetros $1/2$ y $1/2$, así como del índice del primer mínimo y del primer máximo. Esta distribución Beta es una de las pocas para las cuales existe una expresión explícita para la función de distribución:

$$\int_0^x \frac{1}{\pi\sqrt{y\,(1-y)}}\,dy = \frac{2}{\pi}\arcsin\left(\sqrt{x}\right).$$

Se explica entonces que se haya decidido nombrarla distribución arcoseno.

Los métodos utilizados por Sparre-Andersen son combinatorios. En particular, Anderson establece sus teoremas límite al probar primero el siguiente resultado:

Teorema 1.2 (Identidad de Andersen)**.** *Las variables A_n y ρ^n tienen la misma distribución.*

La variable que decide después estudiar Andersen es la de ρ^n pues se puede utilizar más directamente el hecho de que las variables $X_1, X_2, \ldots$ sean independientes e idénticamente distribuidas.

Este tipo de desarrollos pueden consultarse en el volumen I del libro clásico de Feller [6]. De hecho, el capítulo de fluctuaciones de la caminata aleatoria simple fue reescrito en dicha edición para poder basar la teoría en los métodos combinatorios comenzados por Andersen. (Baso esta afirmación en la nota al pié de página de la p. 82 del citado libro).

2. El minorante convexo de caminatas aleatorias

Andersen también comenzó el estudio del minorante convexo. En un momento describiremos por qué permite abordar el estudio del mínimo de una caminata aleatoria y de su posición.

Sea S una caminata aleatoria y fijemos un umbral n. Interpolaremos linealmente a las cantidades $(S_n, n \in \mathbb{N})$ para obtener una función aleatoria definida en $[0, \infty)$; abusaremos de la notación al denotar por S_t el valor de esta interpolación, específicamente, definimos

$$S_t = S_{\lfloor t \rfloor} \left(\lceil t \rceil - t \right) + S_{\lceil t \rceil} \left(t - \lfloor t \rfloor \right),$$

donde $\lfloor t \rfloor$ denota al mayor entero menor o igual a t mientras que $\lceil t \rceil$ denota al menor entero mayor o igual a t.

Siempre hay una función convexa menor o igual a S en $[0, n]$; en efecto, $c(t) = M_n$ para $t \in [0, n]$ es una tal función. Por otra parte, recordemos que el supremo de una familia de funciones convexas que está acotada superiormente en un punto es una función convexa. Por lo tanto, podemos definir al minorante convexo de S en $[0, n]$ como la función convexa más grande que es menor o igual a S en $[0, n]$. En otras palabras, la función C dada por

$$C_t = \sup \{ c(t) : \ c \text{ es convexa y } c \leq S \text{ en } [0, n] \}$$

es convexa, acotada superiormente por S en $[0, n]$ y si c es convexa acotada superiormente por S en $[0, n]$ entonces $c \leq C$. Una forma de imaginar al minorante convexo de una caminata aleatoria es como sigue: amarramos una cuerda al principio y al final de la trayectoria, dejando que cuelgue por debajo y luego la tensamos. El resultado será claramente una función lineal por pedazos.

Es fácil constuir al minorante convexo de manera algorítmica: Definimos $C_0 = S_0 = 0$. Luego nos fijamos en la mínima pendiente formada desde cero:

$$P_1 = \min_{m \leq n} \frac{S_m}{m}$$

así como en el último punto de contacto con dicha recta

$$K_1 = \max \left\{ m \leq n : \frac{S_m}{m} = P_1 \right\}.$$

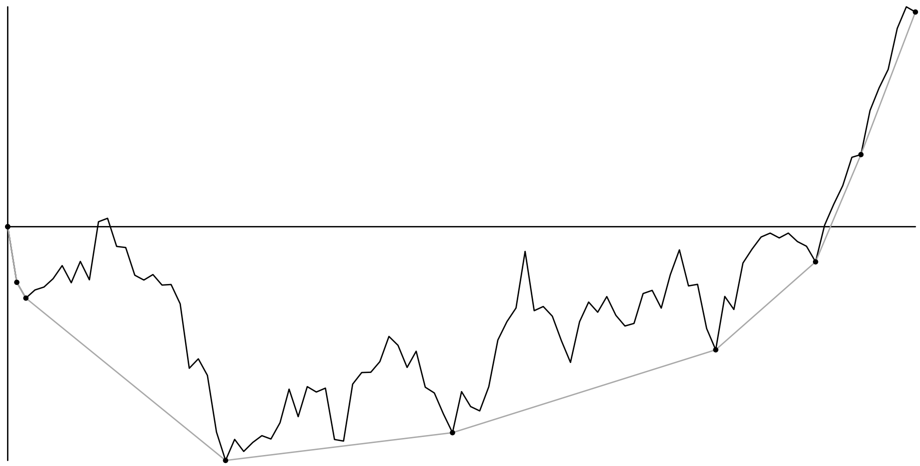

FIGURA 3. Minorante covexo de una caminata aleatoria de 100 pasos con incrementos gaussianos. Hay 9 puntos de contacto.

El minorante convexo será igual a $\rho_1 t$ en $[0, K_1]$.

Ejercicio 2.1. *Bajo la hipótesis* **H***, existe casi seguramente un único elemento en*

$$\left\{ m \leq n : \frac{S_m}{m} = P_1 \right\}.$$

Posteriormente, formamos la mínima pendiente posterior a K_1:

$$P_2 = \min \left\{ K_1 < m \leq n : \frac{S_m - S_{K_1}}{m - K_1} \right\}$$

así como al último punto de contacto con dicha recta:

$$K_2 = \max \left\{ K_1 < m \leq K_1 : \frac{S_m - S_{K_1}}{m - K_1} = P_1 \right\}.$$

El minorante convexo será igual a $S_{K_1} + P_2 (t - K_1)$ en $[K_1, K_2]$. Así continuaremos hasta que terminemos de ver toda la trayectoria. En las Figuras 3 y 4 se pueden apreciar los minorantes convexos de las caminatas aleatorias de 100 pasos ilustradas anteriormente.

En particular, generaremos una cantidad aleatoria F_n de puntos de contacto $K_1, \ldots, K_{F_n}$, que dividen al minorante convexo en lo que podemos denominar sus caras. Un resultado de Andersen nos dice que bajo la hipótesis **H** la distribución de la cantidad de caras F_n no depende de la distribución de X_1. Además, veremos por qué razón F_n es de orden $\log(n)$.

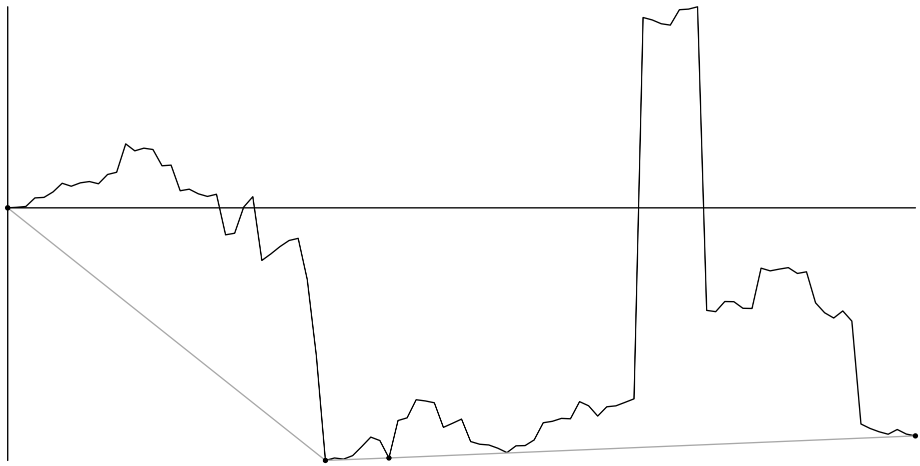

Figura 4. Minorante covexo de una caminata aleatoria de 100 pasos con incrementos Cauchy. Hay 4 puntos de contacto, aunque visualmente parezca que hay uno más.

Una de las razones por las cuales es interesante el minorante convexo en teoría de fluctuaciones es la siguiente: es más fácil minimizar al minorante convexo que a la caminata aleatoria puesto que su derivada (lateral derecha) es no decreciente. Así, es suficiente ver en qué punto el minorante convexo tiene su primera pendiente no-negativa para encontrar el lugar en el que se minimiza la caminata aleatoria. En otras palabras, vemos que

$$\rho_n = \sum_i [K_i - K_{i-1}] \mathbf{1}_{P_i < 0}.$$

si $K_0 = 0$. Además, tenemos una representación similar para el mínimo de la caminata aleatoria:

$$M_n = \sum_i \left[C_{K_i} - C_{K_{i-1}}\right] \mathbf{1}_{P_i < 0}.$$

3. La transformación de Vervaat

Por supuesto, las expresiones anteriores para el mínimo de una caminata aleatoria no nos sirven de mucho si no tenemos una manera adicional de entender al minorante convexo. Esto es, el estudio directo del minorante convexo puede parecer complicado. Por ejemplo, calculemos la probabilidad de que la primera cara del minorante convexo tenga longitud k:

$$\mathbb{P}(K_1 = k) = \mathbb{P}\left(\frac{S_1}{1}, \ldots, \frac{S_{k-1}}{k-1} \geq \frac{S_k}{k} \text{ y } \frac{S_{k+1}}{k}, \ldots, \frac{S_n}{n} > \frac{S_k}{k}\right).$$

Cuando $k = n$, la fórmula anterior toma la forma

$$\mathbb{P}(K_1 = n) = \mathbb{P}\left(\frac{S_1}{1}, \ldots, \frac{S_{n-1}}{n-1} \geq \frac{S_n}{n}\right),$$

que quiere decir que la gráfica de S siempre está por encima de la recta que une $(0,0)$ con (n, S_n). Afortunadamente, el trabajo reciente [2] presenta una descripción probabilística del minorante convexo que es bastante útil. Un ejemplo del tipo de argumentos en los que se basa es el caso particular

$$\mathbb{P}(K_1 = n) = \frac{1}{n}$$

que se satisface bajo la hipóteis **H**. El argumento para probar dicha igualdad, que es combinatorio, es el siguiente. Lo primero es fijarse que la caminata aleatoria es invariante ante permutaciones, en particular ante permutaciones cíclicas. En efecto, si σ es una permutación de $1, \ldots, n$ y definimos

$$X_i^\sigma = X_{\sigma(i)} \quad \text{y} \quad S_i^\sigma = X_1^\sigma + \cdots + X_i^\sigma$$

entonces S^σ tiene la misma distribución que S. En particular, esto sucede para las llamadas permutaciones cíclicas, de las cuales hay n y están dadas por

$$c^k(i) = \begin{cases} k+i & i+k \leq n \\ k+i-n & i \leq n, i+k > n \end{cases} \qquad \text{para } k \in \{0, \ldots, n-1\}.$$

A la caminata aleatoria afectada por la permutación cíclica c^k la denotaremos por S^k. Ahora, notemos que bajo **H** existe un único índice K (aleatorio) tal que S^K se encuentra por encima del segmento que une sus valores inicial y final. En efecto, basta tomar K igual al índice en que ocurre el mínimo de $S_i - i/nS_n$, que será único bajo la hipótesis **H**. Finalmente, escribimos

$$\mathbb{P}(K = n) = \mathbb{P}\left(\frac{S_1}{1}, \ldots, \frac{S_{n-1}}{n-1} < \frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}\left(\frac{S_1^k}{1}, \ldots, \frac{S_{n-1}^k}{n-1} < \frac{S_n^k}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

donde la última igualdad se justifica por la ley de la probabilidad total al utilizar que hay un único índice K tal que S^K queda por encima del segmento que une sus valores inicial y final. Este tipo de argumentos son la base combinatoria de la descripción que haremos del minorante convexo de una caminata aleatoria. Sin embargo, aprovecharemos la discusión para introducir otro ingrediente importante: la transformación de Vervaat.

La transformación de Vervaat resulta de responder la siguiente interrogante: ¿cómo se comporta la caminata aleatoria si la condicionamos con el evento en

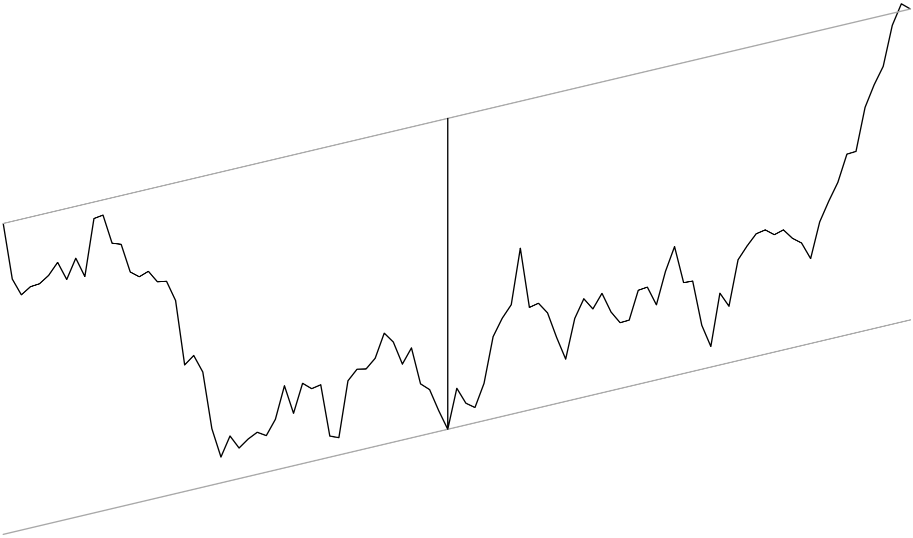

FIGURA 5. Caminata aleatoria con incrementos gaussianos y $K = 49$.

que permanece por debajo de la cuerda que une sus puntos inicial y final? La respuesta es de nuevo sencilla y se obtiene mediante un argumento combinatorio bajo **H**. Sea $V = S^K$, donde K es el índice de la única permutación cíclica que hace que la caminata aleatoria quede por debajo de su valor inicial y final. A V se le conoce como la transformada de Vervaat de S. La transformación de Vervaat para nuestra caminata aleatoria con incrementos gaussianos se puede visualizar en las Figuras 5 y 6.

Un caso particular del siguiente teorema fué encontrado por Vervaat y publicado en [10].

Teorema 3.1. *La distribución condicional de*

$$(S_1, \ldots, S_n) \,\Big|\, \left\{ \frac{S_1}{1}, \ldots, \frac{S_{n-1}}{n-1} > \frac{S_n}{n} \right\}$$

es la distribución de $V_1, \ldots, V_n$.

En otras palabras, se afirma que

$$\mathbb{P}\left(S_1 \leq x_1, \ldots, S_n \leq x_n \,\Big|\, \frac{S_1}{1}, \ldots, \frac{S_{n-1}}{n-1} > \frac{S_n}{n} \right) = \mathbb{P}(V_1 \leq x_1, \ldots, V_n \leq x_n)$$

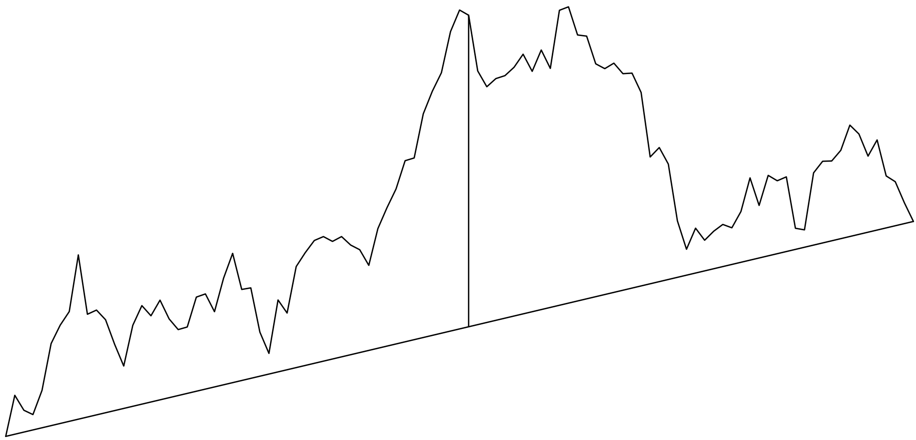

Figura 6. Transformación de Vervaat de la caminata aleatoria con incrementos gaussianos con $K = 49$.

para cualesquiera $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Equivalentemente, se afirma que para cualquier función continua $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left(F(S)\,\mathbf{1}_{\frac{S_1}{1},\ldots,\frac{S_{n-1}}{n-1}>\frac{S_n}{n}}\right) = \mathbb{E}(F(V)) .$$

Demostración. Sea V la transformación de Vervaat de S; esta coincide con la transformación de Vervaat de S^k. Por lo tanto, para cualquier función continua $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$:

$$\mathbb{E}\left(F(S)\,\mathbf{1}_{\frac{S_1}{1},\ldots,\frac{S_{n-1}}{n-1}>\frac{S_n}{n}}\right) = \mathbb{E}(F(V)\,\mathbf{1}_{K=0}) = \mathbb{E}(F(V)\,\mathbf{1}_{K=k})$$

para cualquier $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. Por lo tanto

$$\mathbb{E}\left(F(S)\,\mathbf{1}_{\frac{S_1}{1},\ldots,\frac{S_{n-1}}{n-1}>\frac{S_n}{n}}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{E}(F(V)\,\mathbf{1}_{K=k}) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{E}\big(F(V)\,\mathbf{1}_{K(S^k)=0}\big)$$

y puesto que hay un único $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ tal que $K\big(S^k\big) = 0$ se sigue que

$$\mathbb{E}\left(F(S)\,\mathbf{1}_{\frac{S_1}{1},\ldots,\frac{S_{n-1}}{n-1}>\frac{S_n}{n}}\right) = \frac{1}{n}\mathbb{E}(F(V)) .$$

Ya habíamos probado que

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_1}{1}, \ldots, \frac{S_{n-1}}{n-1} > \frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n},$$

de lo cual se sigue que

$$\mathbb{E}\left(F(S) \,\middle|\, \frac{S_1}{1}, \ldots, \frac{S_{n-1}}{n-1} > \frac{S_n}{n} \right) = \mathbb{E}(F(V)) . \qquad \square$$

Notemos que la transformación que manda a S en (V, K) es invertible: dadas V y K podemos reconstruir a S al partir a V en dos pedazos, en $n - K$, e intercambiarlos.

4. La transformación 3214

Ahora presentaremos la transformación clave que permite estudiar al minorante convexo de una caminata aleatoria. Sea S la caminata aleatoria con saltos $X_1, X_2, \ldots$ (extendida a $[0, \infty)$ por interpolación lineal, fijemos al umbral n y sea C el minorante convexo de S en $[0, n]$. Recordemos que habíamos definido a los puntos de contacto con el minorante convexo $K_1, \ldots, K_{F_n}$ que dividen al minorante en sus distintas caras. Sus longitudes respectivas son $L_1, \ldots, L_{F_n}$ e iguales a $L_i = K_i - K_{i-1}$ (donde definimos $K_0 = 0$). Ahora seleccionaremos una cara al azar y lo haremos mediante la introducción de una variable aleatoria uniforme U entre 1 y n. Entonces U pertenece a una cara del minorante convexo que comienza, digamos en g, y termina en d. Notemos que el efecto de utilizar a la variable aleatoria uniforme U para escoger una cara del minorante convexo es que las caras más grandes tienen mayor probabilidad de ser escogidas. De hecho, la probabilidad de escoger cierta cara depende de su longitud. Es por esto que esta manera de seleccionar una cara se le ha llamado muestreo sesgado por tamaño.

Con las 3 cantidades $g \leq U \leq d$ (aunque en principio U podría coincidir con d) podemos dividir a la trayectoria de S en 4 pedazos mismos que reordenaremos como 3, 2, 1 y 4 para formar una nueva trayectoria. La definición formal es la siguiente. Consideremos a $\tilde{S}$ definida mediante:

$$\tilde{S}_k = \begin{cases} S_{U+k} - S_U & 0 \leq k < d - U \\ S_{g+k-(d-U)} - S_g + S_d - S_U & d - U \leq k < d - g \\ S_{k-d-g} + S_d - S_g & d - g \leq k < d \\ S_k & d \leq k \leq n \end{cases} .$$

El lector puede visualizar el efecto de esta transformación en la Figuras 7 y 8.

El siguiente teorema es inesperado pero admite una prueba simple.

Teorema 4.1. *Bajo* **H***, hay igualdad en distribución entre* (S, U) *y* $\left(\tilde{S}, d - g\right)$.

En particular, obtenemos la sorprendente conclusión de que una cara del minorante muestreada por tamaño tiene un tamaño uniforme y que el incremento del minorante convexo en dicha cara, condicionalmente a que la cara tenga tamaño k, tiene la misma distribución que S_k.

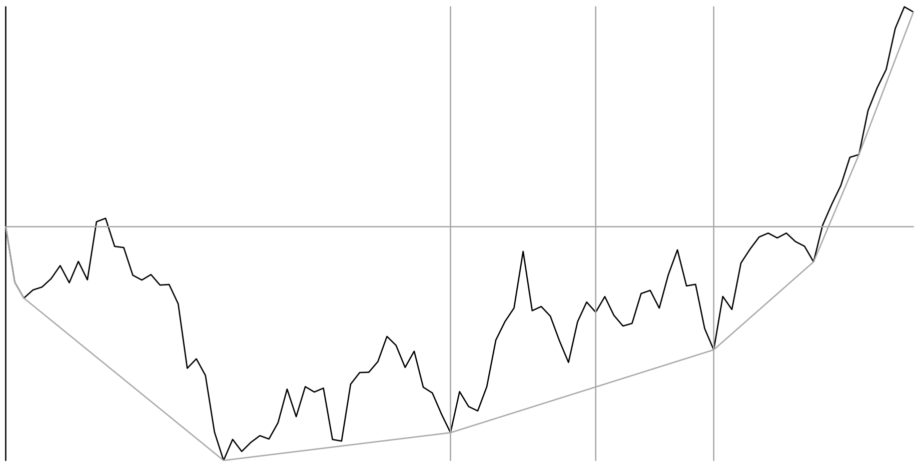

Figura 7. Caminata aleatoria gaussiana dividida en 4 partes en los instantes g, U y d junto con su minorante convexo.

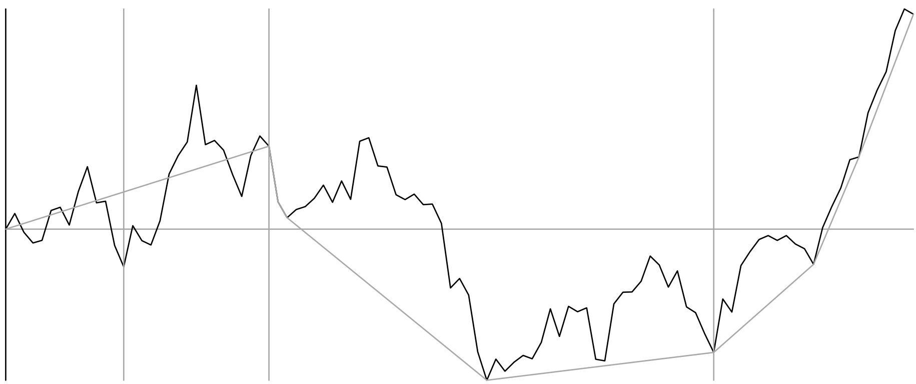

Figura 8. Efecto de la transformación 3214 en la caminata aleatoria gaussiana. Nótese como el minorante convexo de las partes 3 y 4 se obtiene del minorante convexo original al quitar las partes 2 y 3.

Demostración. Comenzamos por observar que la transformación

$$(S, U) \mapsto \left(\tilde{S}, d-g\right)$$

es invertible bajo la hipótesis **H**. En efecto, sólo hace falta ver cómo identificar los 4 pedazos de la trayectoria original. Dadas $\tilde{S}$ y $d-g$, partimos a la trayectoria $\tilde{S}$ en dos pedazos: el que precede y el que sigue a $d-g$. Al primer pedazo le aplicamos la transformación de Vervaat, el instante del mínimo será precisamente $U-g$ y calculamos su pendiente (esto nos da las partes 3 y 2 en la trayectoria original, que luego de la transformación de Vervaat se tornan en 2 y 3). Luego, intercalamos el resultado en el segundo pedazo al calcularle a este el minorante convexo. Hay un único lugar en el que es posible intercalar: en el minorante convexo las pendientes irán creciendo hasta sobrepasar la pendiente del primer pedazo, lo cual nos da acceso a la cantidad g y por ende también a U; ahí es donde la transformación de Vervaat se intercala.

Sea Π_n el conjunto de permutaciones de $\{1,\ldots,n\}$. Si $\sigma\in\Pi_n$, sea S^σ la caminata aleatoria cuyos saltos son $X_{\sigma_1},\ldots,X_{\sigma_n}$. Se denotará por $\tilde{S}^\sigma$ a la transformada 3214 de S^σ (y utilizaremos el superíndice σ para las cantidades relacionadas).

Ahora, para cada $\omega\in\Omega$, definamos al conjunto de las trayectorias posibles de las permutaciones de la caminata aleatoria

$$E(\omega)=\left\{\left(S_1^\sigma(\omega),\ldots,S_n^\sigma(\omega)\right):\sigma\in\Pi_n\right\}.$$

Notemos que $\tilde{S}^\sigma(\omega)\in E(\omega)$ para cualquier permutación σ. Puesto que la transformación 3214 es invertible se sigue que la función de $E(\omega)\times\{1,\ldots,n\}$ en si mismo que asigna a cada par $\left(S^\sigma(\omega),U(\omega)\right)$ el par $\left(\tilde{S}^\sigma(\omega),d^\sigma(\omega)-g^\sigma(\omega)\right)$ es una biyección. Por lo tanto:

$$\sum_{\sigma\in\Pi^n}F\left(\tilde{S}^\sigma,d^\sigma-g^\sigma\right)=\sum_{\sigma\in\Pi_n}F(S^\sigma,U).$$

Por otra parte, puesto que S y S^σ tienen la misma distribución se sigue que

$$\mathbb{E}\left(F\left(\tilde{S}^\sigma,d^\sigma-g^\sigma\right)\right)=\mathbb{E}\left(F\left(\tilde{S},d-g\right)\right).$$

Se concluye que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(F\left(\tilde{S},d-g\right)\right)&=\frac{1}{n!}\mathbb{E}\left(\sum_{\sigma\in\Pi^n}F\left(\tilde{S}^\sigma,d^\sigma-g^\sigma\right)\right)\\&=\frac{1}{n!}\mathbb{E}\left(\sum_{\sigma\in\Pi_n}F(S^\sigma,U)\right)\\&=\mathbb{E}(F(S,U)).\end{aligned}$$

□

Podemos iterar a la transformación 3214. Esto se sigue pues el minorante convexo de la trayectoria en los pedazos 1 y 4 queda invariante. Por lo tanto, si la primera cara que escogimos tiene longitud k, podemos escoger otra cara del minorante al trabajar con la trayectoria $\tilde{S}$ al considerar una variable uniforme U_2 en $\{k+1, \ldots, n\}$ y repetir la transformación 3214 pero sólamente en $\{k, \ldots, n\}$. Puesto que muestreamos una cara cada vez, en F_n pasos habremos terminado de muestrear al minorante convexo y obtendremos una caminata aleatoria y una sucesión de variables muy interesante. Comencemos con esta última.

Definición 4.2. *Se construye el* **proceso de asignación residual uniforme** *en $\{1, \ldots, n\}$ $R_1, R_2, \ldots$ como sigue: sea R_1 uniforme en $\{1, \ldots, n\}$. Si $R_1 = n$ entonces $R_2 = R_3 = \cdots = 0$. En otro caso, condicionalmente al evento $R_1 = m < n$ R_2 es uniforme en $\{1, \ldots, n-m\}$. Si $R_1 + R_2 = n$ entonces $R_3 = R_4, \ldots$. Si no, condicionalmente a $R_1 = m_1, R_2 = m_2$ donde $m_1 + m_2 < n$, R_3 es uniforme en $\{1, \ldots, n - m_1 - m_2\}$. Así continuamos recursivamente.*

Lo primero que observamos al iterar la transformación 3214 es el siguiente resultado.

Corolario 4.3. *Bajo la hipótesis* **H***, la muestra sesgada por tamaño de las caras del minorante convexo de S tiene la misma distribución que el proceso de asignación residual uniforme.*

En particular, vemos que la distribución de una muestra sesgada por tamaño de las caras no depende de la distribución de salto de la caminata aleatoria. Aún más, notemos que el número de caras del minorante convexo coincide con la cantidad de índices i tales que $R_i \neq 0$. Este caso particular ya lo había probado Andersen.

Sin embargo, podemos ir más lejos, pues el proceso de asignación residual uniforme ha sido ampliamente estudiado. Se puede consultar [7], donde se liga a este proceso con las permutaciones aleatorias uniformes y el proceso del restaurante chino. Un resultado importante sobre el proceso de asignación residual uniforme es su invariancia ante muestras sesgadas por tamaño. En particular, R_1 tiene la misma distribución que una muestra sesgada por tamaño de R en el sentido siguiente: si $\tilde{R}_1$ es tal que

$$\mathbb{P}\left(\tilde{R}_1 = R_i \,\middle|\, R_1, \ldots, R_n \right) = \frac{R_i}{n}$$

entonces $\tilde{R}_1$ es uniforme. Una consecuencia inmediata es la siguiente.

Proposición 4.4. *Para cualquier función $f : \{0, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$:*

$$\mathbb{E}\left(\sum_i f(R_i) \right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(i)}{n}.$$

Otro ejemplo de aplicación del teorema 4.1 es que podemos calcular la distribución conjunta de las longitudes y los incrementos de las caras del minorante convexo.

Teorema 4.5. *Sean $K_1, \ldots, K_{F_n}$ los puntos de contacto de la caminata aleatoria S con su minorante convexo en $[0, n]$. Sean $R_1, \ldots, R_N$ los valores distintos a cero de un proceso de asignación residual uniforme en $\{1, \ldots, n\}$. Supongamos que R es independiente de S. Bajo la hipótesis* **H** *hay igualdad en distribución entre*

$$\begin{aligned}&\left(K_1, K_2 - K_1, \ldots, K_{F_n} - K_{F_n-1}, S_{K_1}, S_{K_2} - S_{K_1}, \ldots, S_{K_{F_n}} - S_{K_{F_n-1}}\right)\\ &\stackrel{d}{=} \left(R_1, R_2, \ldots, R_n, S_{R_1}, S_{R_2} - S_{R_1}, \ldots, S_{R_N} - S_{R_{N-1}}\right).\end{aligned}$$

Ahora veremos qué implicaciones tiene el anterior resultado sobre el mínimo M_n de una caminata aleatoria en $[0, n]$ y sobre el índice ρ_n en que se alcanza. Puesto que el mínimo se obtiene de sumar los incrementos negativos, vemos que

$$M_n \stackrel{d}{=} \sum \left[S_{R_k} - S_{R_{k-1}}\right] \mathbf{1}_{S_{R_k} - S_{R_{k-1}} < 0}.$$

De igual manera, observamos que

$$\rho_n \stackrel{d}{=} \sum \left[R_k - R_{k-1}\right] \mathbf{1}_{S_{R_k} - S_{R_{k-1}} < 0}.$$

Las anteriores relaciones tienen una importancia concreta a nivel práctico. Nos dicen que si queremos simular al mínimo de una caminata aleatoria junto con su posición, no tenemos que simular a toda la trayectoria de la caminata aleatoria de n pasos. Bastara simular a la caminata aleatoria en los puntos que nos dicta un proceso de asignación residual uniforme, que serán del orden del logaritmo de la longitud de la trayectoria (cf. ecuación (3.2) p.56, en [7]). Cambio en la bibliografía: Se ha puesto la bibliografía en el formato de las memorias. Se ha puesto el nombre de Lévy en mayúsculas en la referencia [1]. Cambio en la bibliografía: Se ha cambiado brownian por Brownian. Cambio en la bibliografía: se ha agregado información bibliográfica a la referencia [8]

Finalmente, observamos que

$$\mathbb{E}(M_n) = \mathbb{E}\Big(\sum \left[S_{R_k} - S_{R_{k-1}}\right] \mathbf{1}_{S_{R_k} - S_{R_{k-1}} < 0}\Big);$$

al condicionar por los valores de R y definir $f(k) = \mathbb{E}(S_k \mathbf{1}_{S_k < 0})$, de la Proposición 4.4 vemos que

$$\mathbb{E}(M_n) = \mathbb{E}\Big(\sum f(R_k)\Big) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f(k)}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathbb{E}(S_k \mathbf{1}_{S_k < 0})}{k}.$$

El lector puede consultar el artículo de revisión [1] y sus referencias para mayor información sobre el uso de la transformación 3214 en la teoría de fluctuaciones de caminatas aleatorias y procesos de Lévy.

Bibliografía

[1] J. Abramson, J. Pitman, N. Ross, and G. Uribe Bravo, *Convex minorants of random walks and Lévy processes*, Electronic Communications in Probability **16** (2011), 423–434.

[2] J. Abramson and J. Pitman, *Concave Majorants of Random Walks and Related Poisson Processes*, Combinatorics, Probability and Computing **20** (2011), no. 05, 651–682. DOI: 10.1017/S0963548311000307.

[3] E. S. Andersen, *On the number of positive sums of random variables*, Skand. Aktuarietidskr. **32** (1949), 27–36. MR0032115 (11,256a)

[4] ———, *On the fluctuations of sums of random variables*, Math. Scand. **1** (1953), 263–285. MR0058893 (15,444f)

[5] ———, *On the fluctuations of sums of random variables. II*, Math. Scand. **2** (1954), 195–223. MR0068154 (16,839e)

[6] W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications. Vol. I*, Third edition, John Wiley & Sons Inc., New York, 1968. MR0228020 (37 #3604)

[7] J. Pitman, *Combinatorial stochastic processes*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1875, Springer-Verlag, Berlin, 2006. Lectures from the 32nd Summer School on Probability Theory held in Saint-Flour, July 7–24, 2002, With a foreword by Jean Picard. MR2245368 (2008c:60001)

[8] J. Pitman and N. Ross, *The greatest convex minorant of Brownian motion, meander, and bridge*, Probab. Theory Related Fields **153** (2012), no. 3-4, 771–807. MR2948693

[9] J. Pitman and G. Uribe Bravo, *The convex minorant of a Lévy process*, Ann. Probab. **40** (2012), no. 4, 1636–1674. DOI: 10.1214/11-AOP658.

[10] W. Vervaat, *A relation between Brownian bridge and Brownian excursion*, Ann. Probab. **7** (1979), no. 1, 143–149. MR515820 (80b:60107)