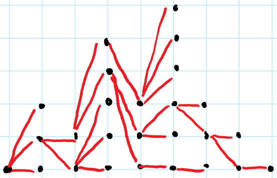
Árboles de Galton-Watson.

$\mathbb{P}_K(\exists n \geq 0, Z_n = 0)$.

I El proceso de Galton-Watson.



Modelo: $(\xi_{i,n}, 1 \leq i, n < \infty)$ iid

(valores en $\mathbb{N}$).

$Z_0 = K \quad (K=1)$

$Z_{n+1} = \xi_{1,n} + \cdots + \xi_{Z_n, n}$

$p_K = \mathbb{P}(\xi_{1,1} = K)$

$\mu = \mathbb{E}(\xi_{1,1}) = \sum_{K=0}^{\infty} K p_K$

Pregunta clásica: ¿Extinción?

$\underline{\mathbb{P}_K}(\underline{\text{Extinción}}) = \underbrace{\mathbb{P}_1(\text{Extinción})}_{\rho}{}^K$

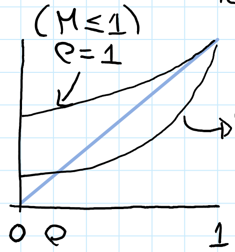
$f(s) = \mathbb{E}(s^{\xi_{1,1}}) = \sum_{K=0}^{\infty} s^K p_K$

$f(1) = 1$

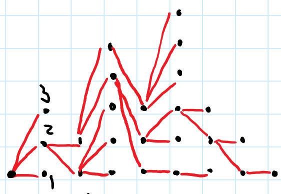
$\rho = \mathbb{P}_1(\text{Extinción}) = \sum_{K=0}^{\infty} \mathbb{P}_1(Z_1 = K, \text{Extinción})$

$= \sum_{K=0}^{\infty} p_K \rho^K$

$\therefore \rho = f(\rho)$



II Árboles genealógicos:



ϕ 21 211
22 212
213
221
222

Árbol plano enraizado: árbol (combinatorio) con un orden para la descendencia de cada individuo.

Etiquetas canónicas: ϕ para la raíz.

Si un individuo tiene la etiqueta u,

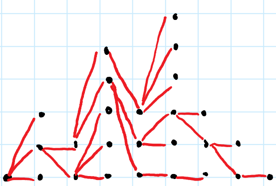
su 1er descendiente tiene etiqueta $u1$

2° $\quad u2$

⋮ $\quad$ ⋮

¿Qué sucede en el ejemplo anterior?

III Formalización del concepto de árbol genealógico:



			222		22213		
			221		22212		
					22211		
	3		213	2221	22122		
	2	22	212	2212	22121	221121	
ϕ	1	21	211	2211	22111	221111	

Conjunto de etiquetas:

$\mathcal{U} = \{u = u_1 \cdots u_n \mid u_i \in \mathbb{Z}_+\} \cup \{\phi\}$

$= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_+^n \qquad (\mathbb{Z}_+^0 = \{\phi\})$

Concatenación: $u = u_1 \cdots u_m \quad v = v_1 \cdots v_n \quad uv = u_1 \cdots u_m v_1 \cdots v_n$

$u\phi = \phi u = u$

Generación (longitud) $|u| = m \quad |\phi| = 0$

Madre: $\Pi(i) = \phi \quad \Pi(ui) = u$

Árbol plano: $\mathcal{T}\subset\mathcal{U}$ tal que:

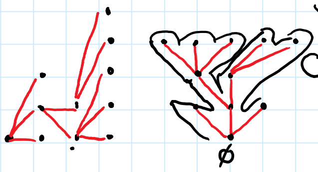
1) $\emptyset\in\mathcal{T}$ 2) Si $uj\in\mathcal{T}\Rightarrow u\in\mathcal{T}$

3) $\forall u\in\mathcal{T}\ \exists K_u(\mathcal{T})\in\mathbb{N}$ $uj\in\mathcal{T}\Leftrightarrow 1\le j\le K_u(\mathcal{T})$

IV Caminos de Łukasiewicz

$\emptyset, 1, 2, 21, 211, 212, 213, 22, 221, 222, 3$

$\mathcal{T}=\{u_1,\dots,u_p\}$ árbol plano.

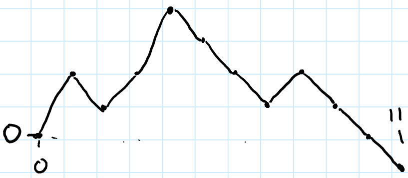


Orden lexicográfico: $u_1<u_2<\dots<u_p$.

$\underline{x_0=0}$, $x_{i+1}=x_i+\underline{(K_{u_i}(\mathcal{T})-1)}$

Incrementos: 2 -1 1 2 -1 -1 -1 1 -1 -1 -1

Camino: 0 2 1 2 4 3 2 1 2 1 0 -1



Propiedades del camino:

$\Delta x_i\in\{-1,0,1,\dots\}$, $x_i\ge 0$, $i<p$, $x_p=-1$.

Teorema: La asignación

$\mathcal{T}\mapsto$ camino de Łukasiewicz

es una biyección.

Ejercicio (Jueves)

Probar el teorema

V El árbol de Galton-Watson

$\mathcal{U}=\bigcup_{n=0}^{\infty}\mathbb{Z}_+^n$ $(\xi_u,\ u\in\mathcal{U})$ iid

$p_k=\mathbb{P}(\xi_u=k)$

$u\precsim v$ si $\exists\, w\in\mathcal{U}$ t.q. $uw=v$

$\Theta=\{v\in\mathcal{U}:\ j\le\xi_u$ si $uj\precsim v\}$.

1) $\emptyset\in\Theta$ por vacuidad.

2) $v=ui\in\Theta$ y $wj\precsim u\Rightarrow wj\precsim v$ y así $j\le\xi_w$.

$\therefore u\in\Theta$

$\therefore\ \Theta$ es un árbol plano.

3) $K_\Theta(u)=\xi_u$ si $u\in\Theta$

VI Un cálculo básico.

$\mathbb{P}(\Theta=\{\emptyset,1,2,21\})$
$=p_2\,p_0\,p_1\,p_0$

$\mathcal{T}=\{u_1,\dots,u_p\}$ árbol plano Θ: árbol (p_k)-GW

$\mathbb{P}(\Theta=\mathcal{T})=\prod_{i=1}^{p}p_{K_{u_i}(\mathcal{T})}$

Ejemplo: $p_i=(1/2)^{i+1}$ $\mathbb{P}(\Theta=\mathcal{T})=\prod_{i=1}^{p}\left(\frac{1}{2}\right)^{K_{u_i}(\mathcal{T})+1}$

Ejemplo: $p_i = (1/2)^{i+1}$

$$\mathbb{P}(\Theta = \tau) = \prod_{i=1}^{p} \left(\frac{1}{2}\right)^{k_{u_i}(\tau)+1}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{\sum (k_{u_i}(\tau)+1)}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{2p-1}.$$

Conclusión: $\Theta \mid \#\Theta = n$ es uniforme sobre los árboles planos con n vértices.

VI El perfil del árbol GW

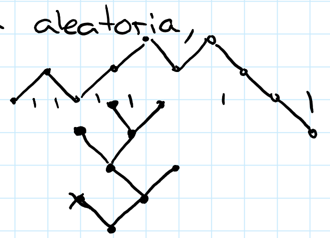
Proposición: Si $Z_n = \#\{u \in \Theta : |u| = n\}$, entonces (Z_n) es un proceso de Galton-Watson con ley de reproducción (p_k) que comienza en 1.

Corolario: $\mathbb{P}(\#\Theta < \infty) = 1 \iff \mu = \sum k p_k \leq 1$.

VII Relación con caminatas aleatorias.

Caminata aleatoria: Sumas parciales asociadas a sucesiones iid: $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

Teorema: Sea Θ un árbol (p_k)-GW. Sea $X = (X_i, i \geq 1)$ su camino de Lukasiewicz. Entonces: $X \mathbb{1}_{\Theta < \infty} \stackrel{d}{=} S^T \mathbb{1}_{T < \infty}$, donde: $S = (S_0, S_1, \dots)$ es una caminata aleatoria, $\mathbb{P}(S_i - S_{i-1} = k) = p_{k+1}$ y $T = \min\{i \geq 0 : S_i = -1\}$.



Corolario: $\#\Theta \stackrel{d}{=} \#T$

$$\mathbb{P}(S^T = (0, 1, 0, 1, 2, 1, 2, 1, 0, -1))$$
$$= \mathbb{P}(T = 9, (S_0, \dots, S_9) \text{ "})$$
$$= \mathbb{P}((S_0, \dots, S_9) = \text{?})$$
$$= \mathbb{P}(S_1 - S_0 = 1, S_2, -1, \dots, S_9 - S_8 = -1)$$
$$= p_2 \, p_0 \cdots p_0$$

VIII El lema cíclico

$x_1, \dots, x_n \in \{-1, 0, 1, \dots\}$

$x_1 + \cdots + x_n = -1$

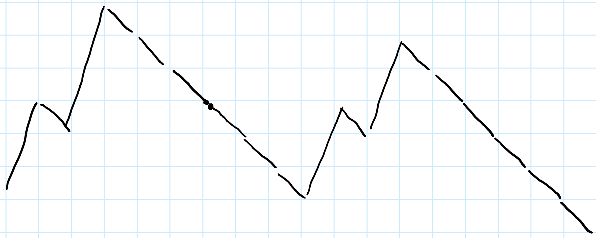
Lema: Existe un único índice $i \in \{0, \dots, n-1\}$ tal que S^i alcanza -1

$x_1 + \dots + x_n = -1$

$x_k^i = x_{k+i \bmod n}$

$S_k^i = x_1^i + \dots + x_k^i$

$i \in \{0, \dots, n-1\}$ tal que S^i alcanza -1 por primera vez al paso n.



IX La distribución de $\#\Theta$

$\mathbb{P}(\#\Theta = n) = \mathbb{P}(T = n)$

$= \mathbb{P}(S$ alcanza -1 al paso n por primera vez$)$

$= \mathbb{P}(S^k$ alcanza -1 al paso n por primera vez$)$

$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(S^k$ alcanza -1 al paso n x 1^a vez$)$

$= \frac{1}{n} \mathbb{P}(S_n = -1)$

$f_{2n} = \frac{1}{2n} U_{2(n-1)}$

Ej: Redemostrar con lema cíclico.

Ejercicio: Calcule la cantidad de árboles planos de n vértices al calcular $\mathbb{P}(S_n = -1)$ si $S_1 \sim geo(1/2)$.

Si $S_1 \stackrel{d}{=} 2Ber(1/2) - 1$, vea que $\Theta \mid \#\Theta = n$ es uniforme y calcule la $\#$ de árboles binarios de n vértices.

X Simulación de árboles binarios uniformes:

$S_0, \dots, S_n \mid T = n$ donde $S_i - S_{i-1} \sim 2Ber(1/2) - 1$.

n unos, $n+1$ menos unos $\qquad S_n = -1$

Si $x_1, \dots, x_n \in \{-1, 1\}$ t.q. $S_i \geq 0$ $(i < n)$, $S_n = -1$:

$\rightarrow \mathbb{P}(S_0 = s_0, \dots, S_n = s_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = (1/2)^n$.

$\therefore S_0, \dots, S_n \mid S_n = -1 \stackrel{d}{=} S_0^*, \dots, S_n^*$

$S_i^* - S_{i-1}^* = x_{\pi(i)}$ $\quad \pi$ es una permutación uniforme en $\{1, \dots, n\}$.

1 1 1 -1 -1 -1 -1

-1 1 1 -1 -1 1 -1