



Gráficas y bloques balanceados

Adriana Hansberg

Instituto de Matemáticas
UNAM Juriquilla

Colaboración con:
Yair Caro y Amanda Montejano

Sinapsis

Sinapsis

- Estructuras monocromáticas y Teoría de Ramsey

Sinapsis

- Estructuras monocromáticas y Teoría de Ramsey
- Estructuras balanceadas

Sinapsis

- Estructuras monocromáticas y Teoría de Ramsey
- Estructuras balanceadas
- Estructuras heterocromáticas o Teoría anti-Ramsey y el concepto de discrepancia

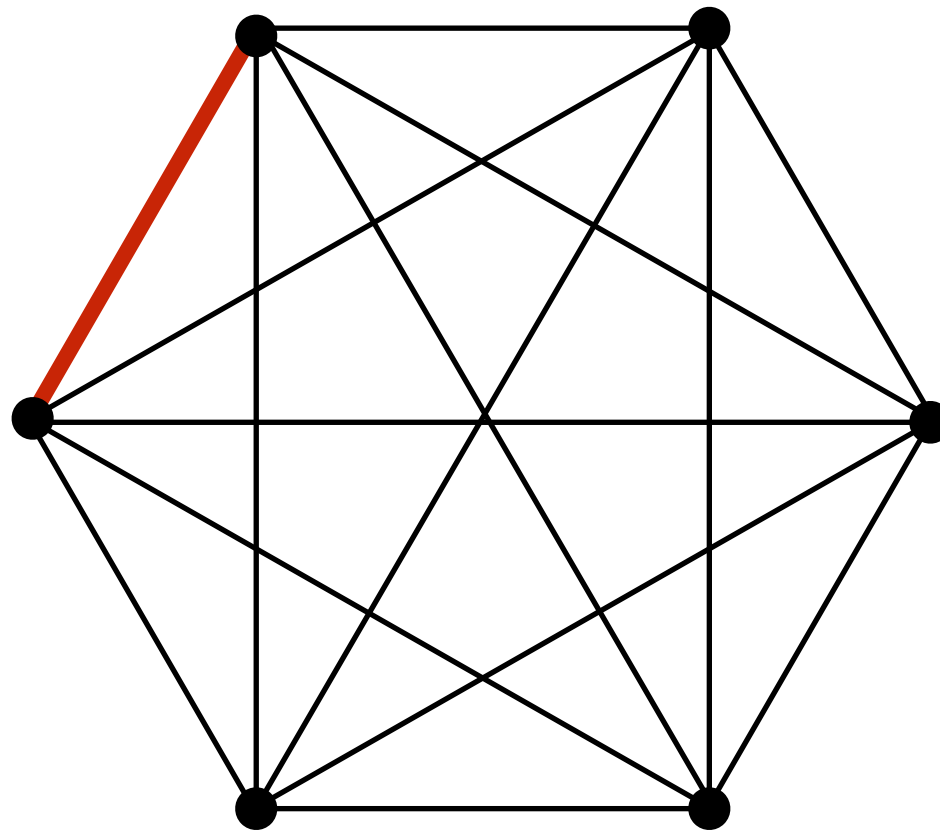
Estructuras monocromáticas

Los 6 comensales

En un grupo de **6** personas (comensales), siempre hay **3** que se conocen entre ellos o **3** que no se conocen entre ellos.

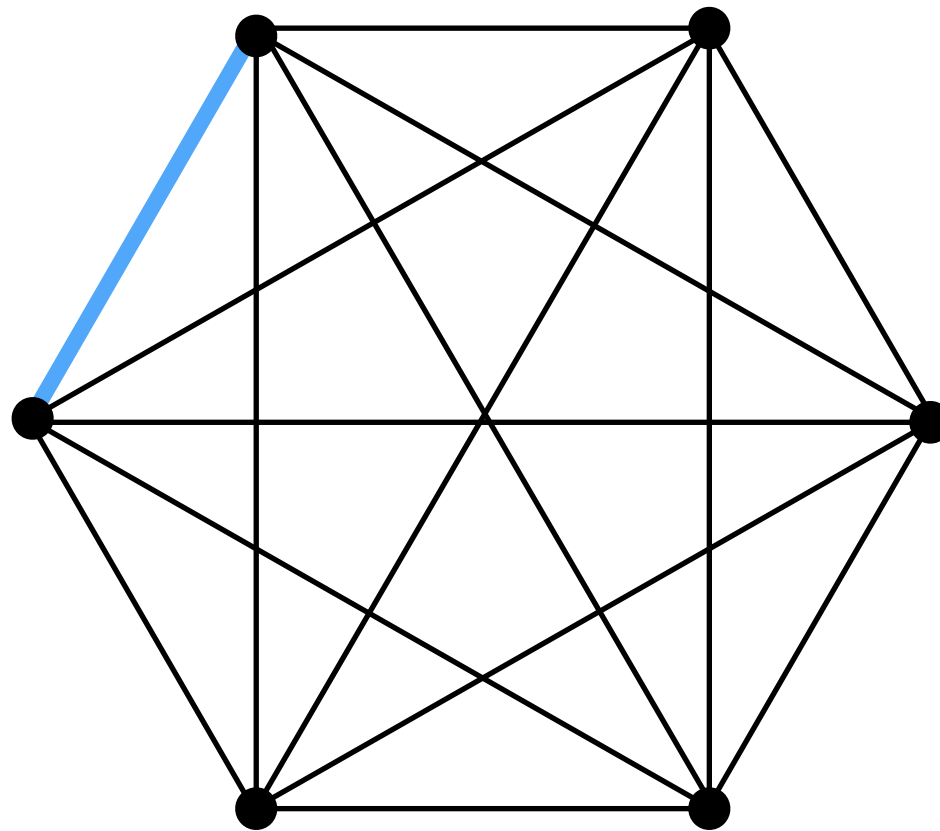
Los 6 comensales

En un grupo de **6** personas (comensales), siempre hay **3** que se conocen entre ellos o **3** que no se conocen entre ellos.



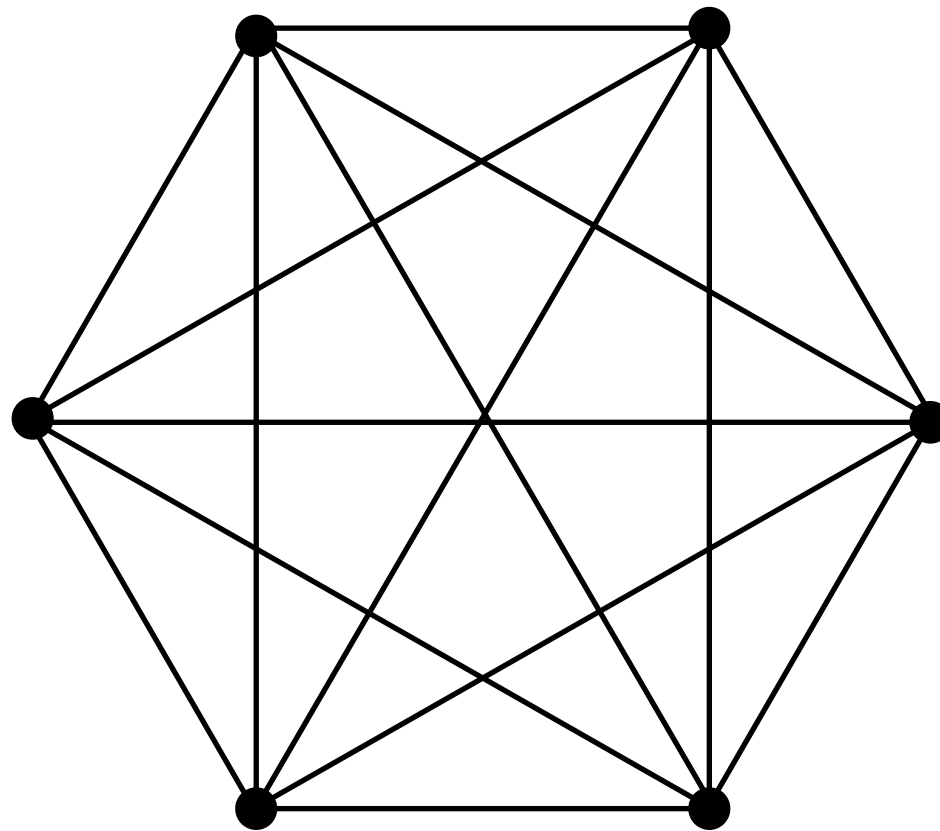
Los 6 comensales

En un grupo de **6** personas (comensales), siempre hay **3** que se conocen entre ellos o **3** que no se conocen entre ellos.



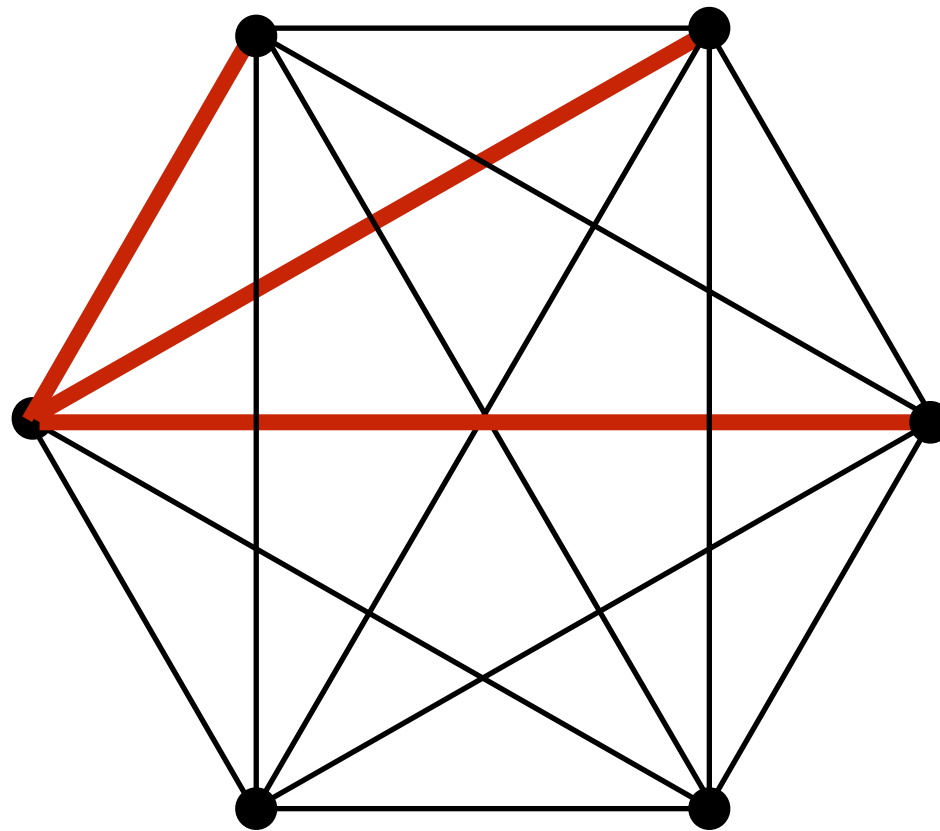
Los 6 comensales

En un grupo de **6** personas (comensales), siempre hay **3** que se conocen entre ellos o **3** que no se conocen entre ellos.



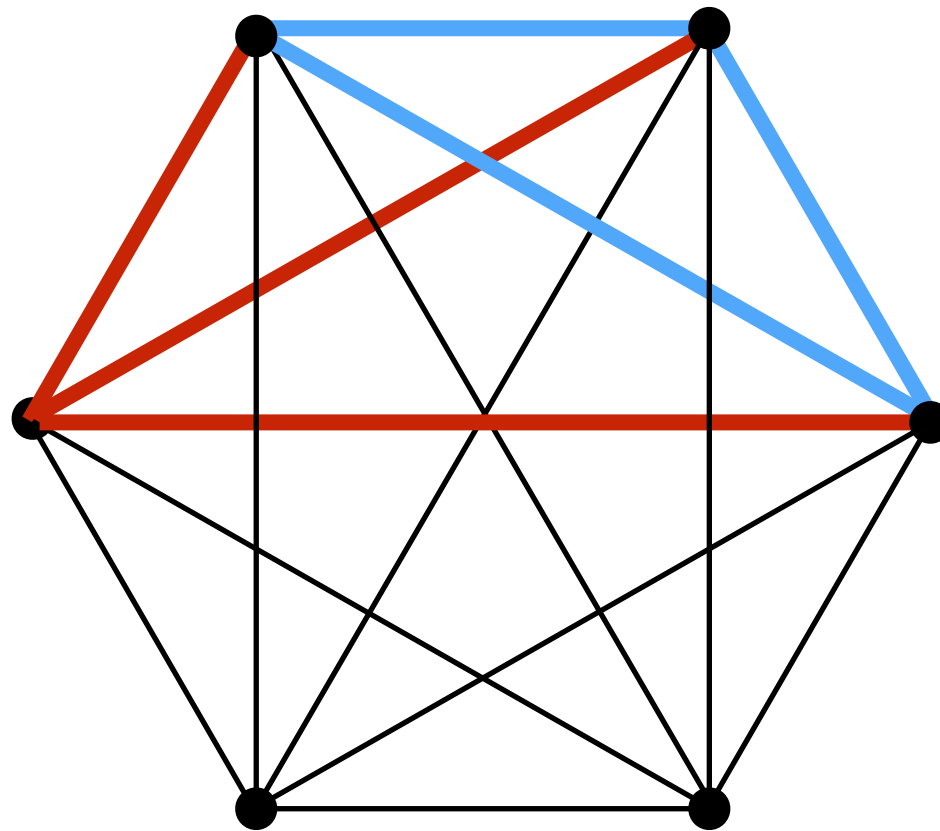
Los 6 comensales

En un grupo de **6** personas (comensales), siempre hay **3** que se conocen entre ellos o **3** que no se conocen entre ellos.



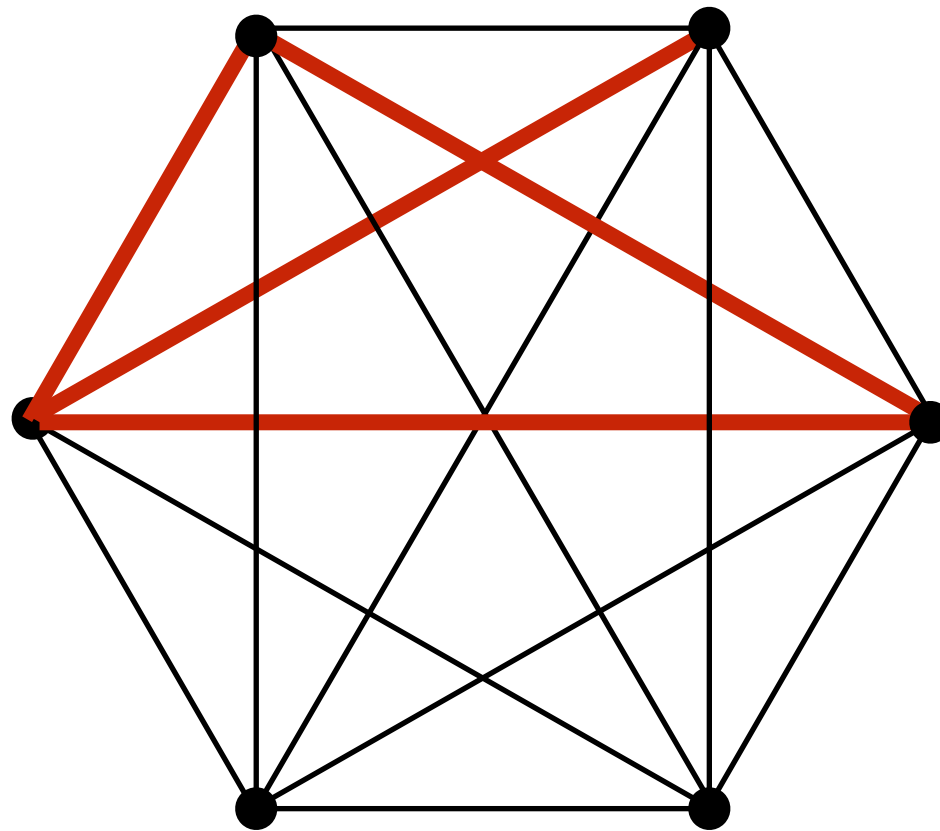
Los 6 comensales

En un grupo de **6** personas (comensales), siempre hay **3** que se conocen entre ellos o **3** que no se conocen entre ellos.



Los 6 comensales

En un grupo de **6** personas (comensales), siempre hay **3** que se conocen entre ellos o **3** que no se conocen entre ellos.

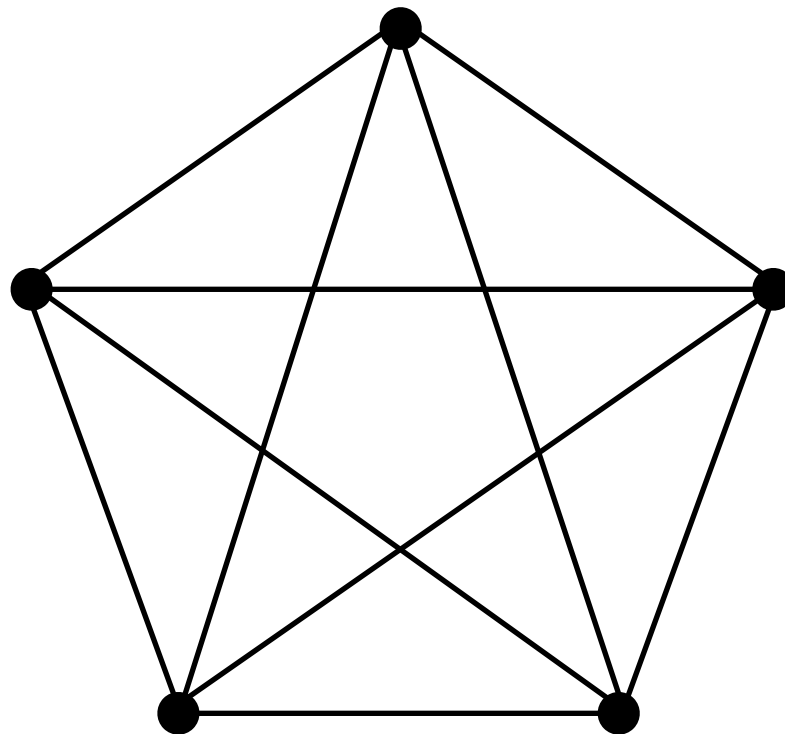


Teorema de Ramsey

Dado $n \geq 6$ y una coloración de las aristas de K_n , siempre existe un triángulo monocromático.

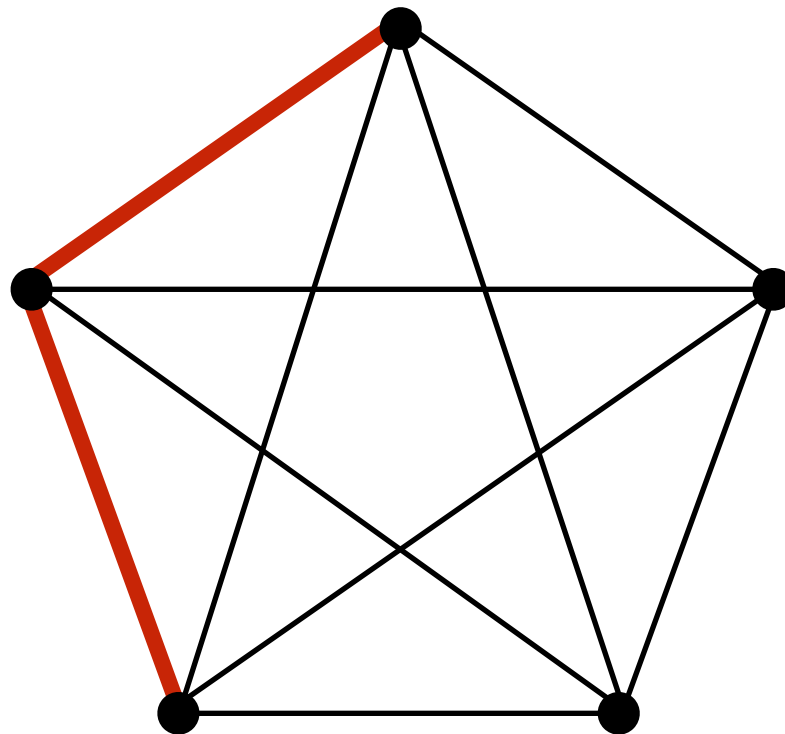
Acertijo 1

Colorea las aristas de K_5 con dos colores de tal forma que no exista ningún triángulo monocromático.



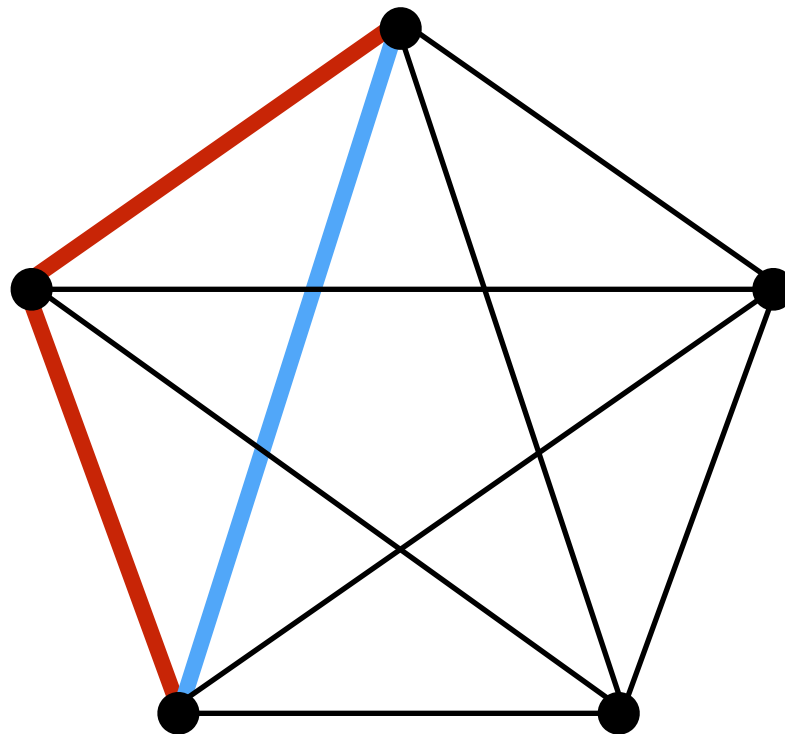
Acertijo 1

Colorea las aristas de K_5 con dos colores de tal forma que no exista ningún triángulo monocromático.



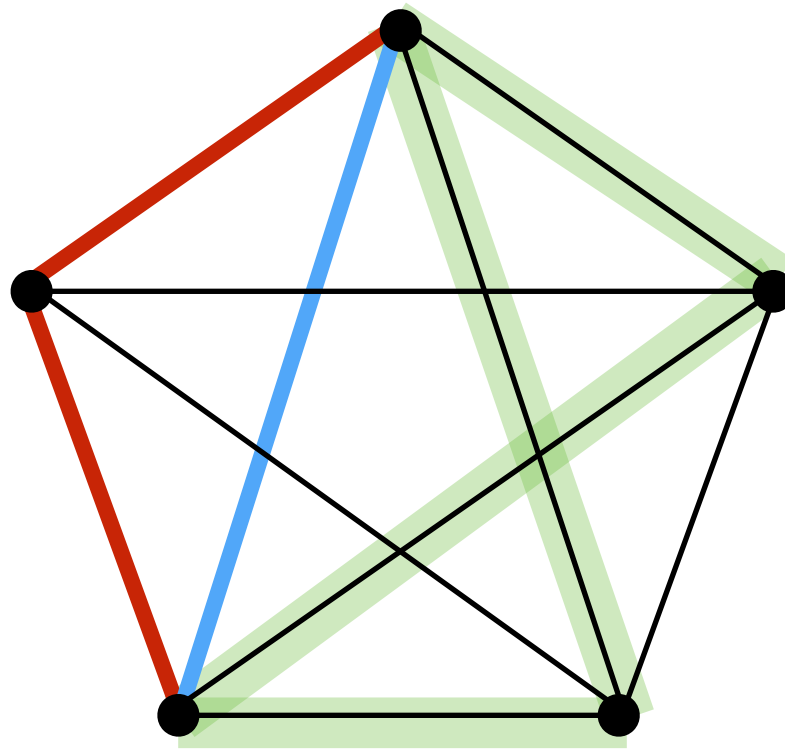
Acertijo 1

Colorea las aristas de K_5 con dos colores de tal forma que no exista ningún triángulo monocromático.



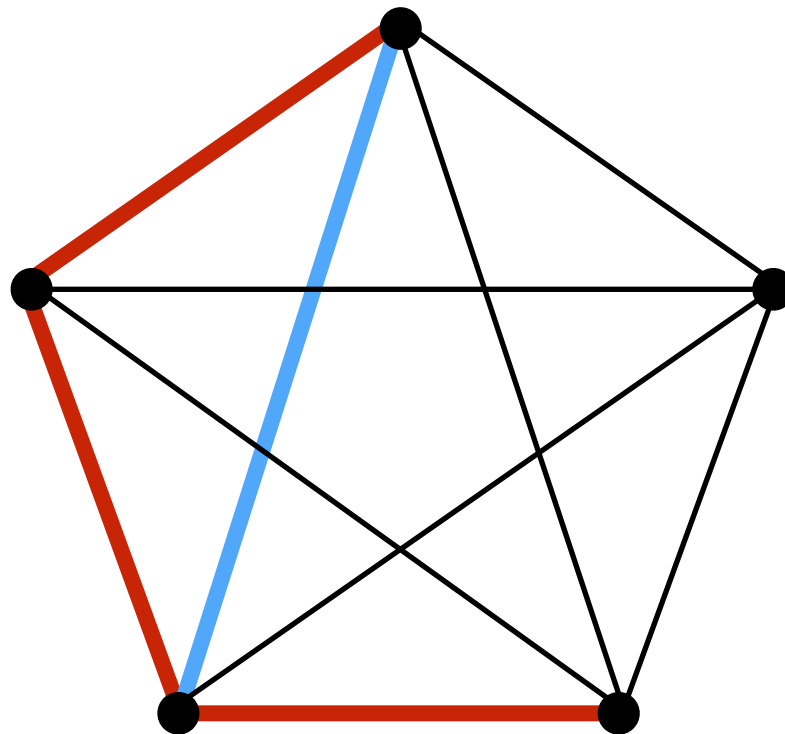
Acertijo 1

Colorea las aristas de K_5 con dos colores de tal forma que no exista ningún triángulo monocromático.



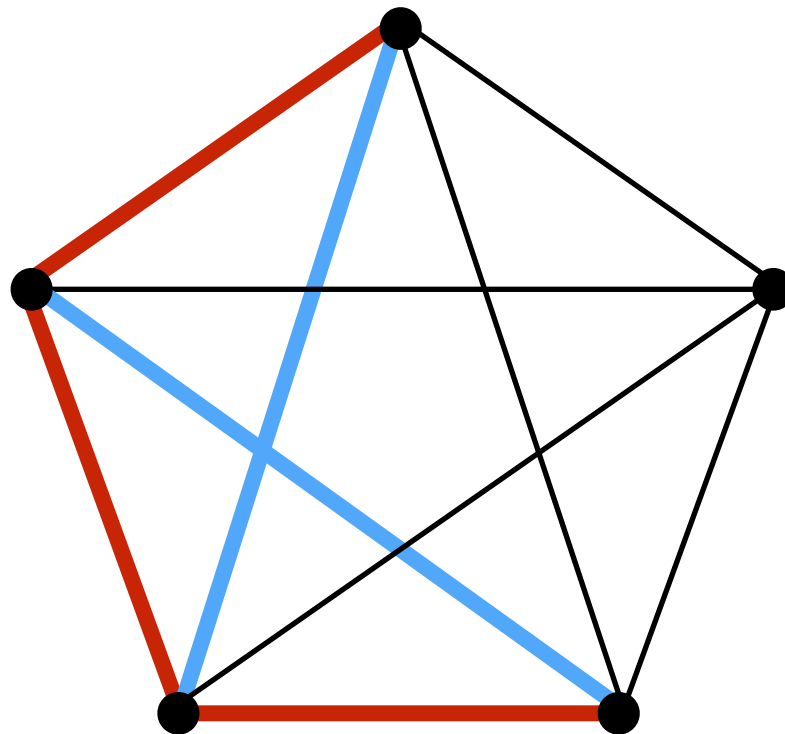
Acertijo 1

Colorea las aristas de K_5 con dos colores de tal forma que no exista ningún triángulo monocromático.



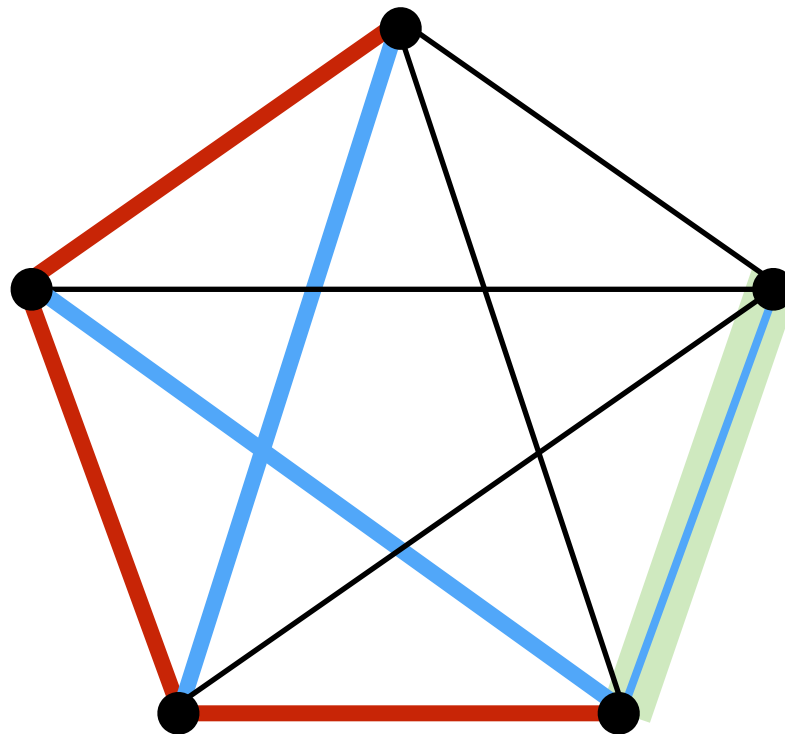
Acertijo 1

Colorea las aristas de K_5 con dos colores de tal forma que no exista ningún triángulo monocromático.



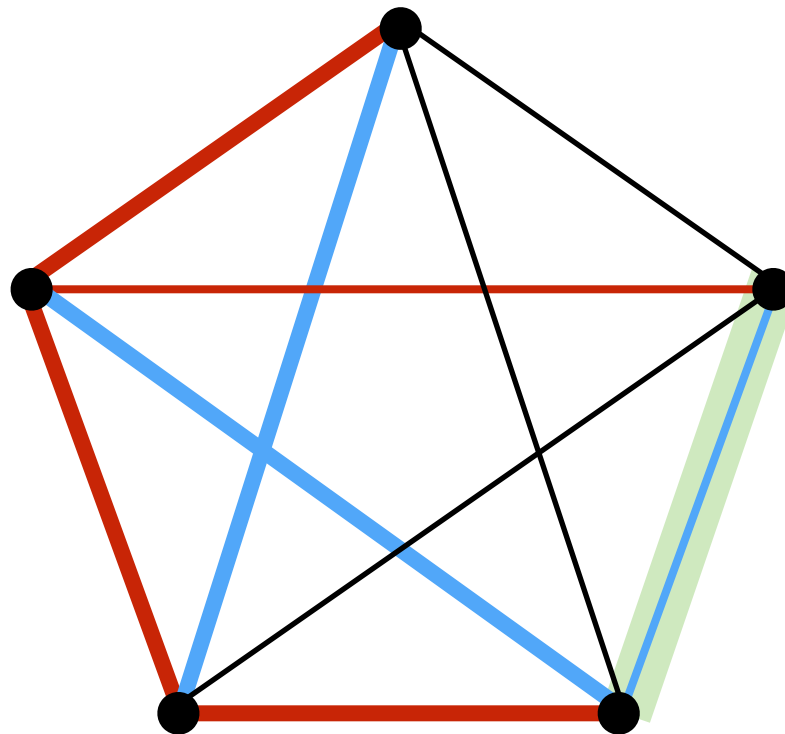
Acertijo 1

Colorea las aristas de K_5 con dos colores de tal forma que no exista ningún triángulo monocromático.



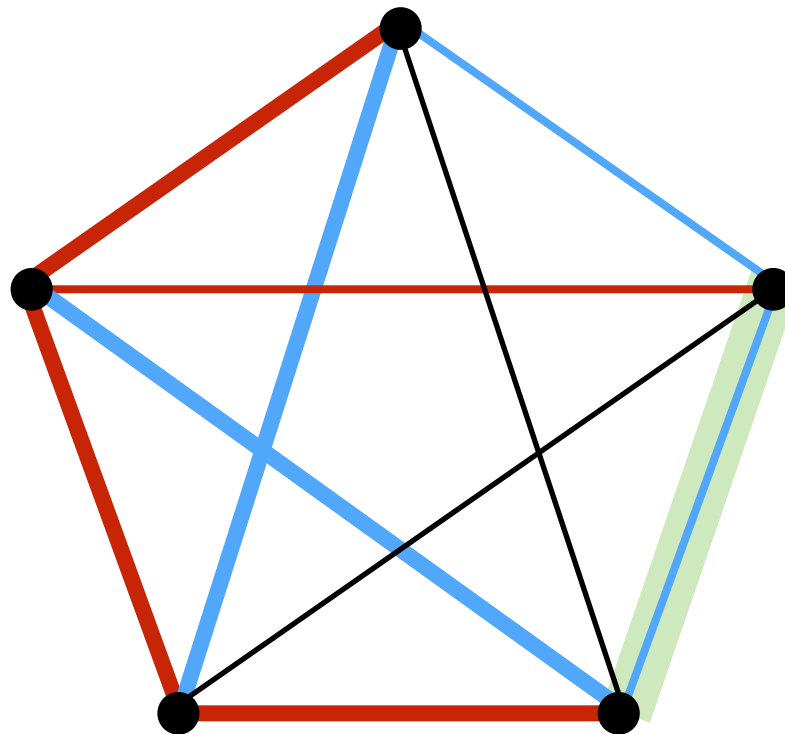
Acertijo 1

Colorea las aristas de K_5 con dos colores de tal forma que no exista ningún triángulo monocromático.



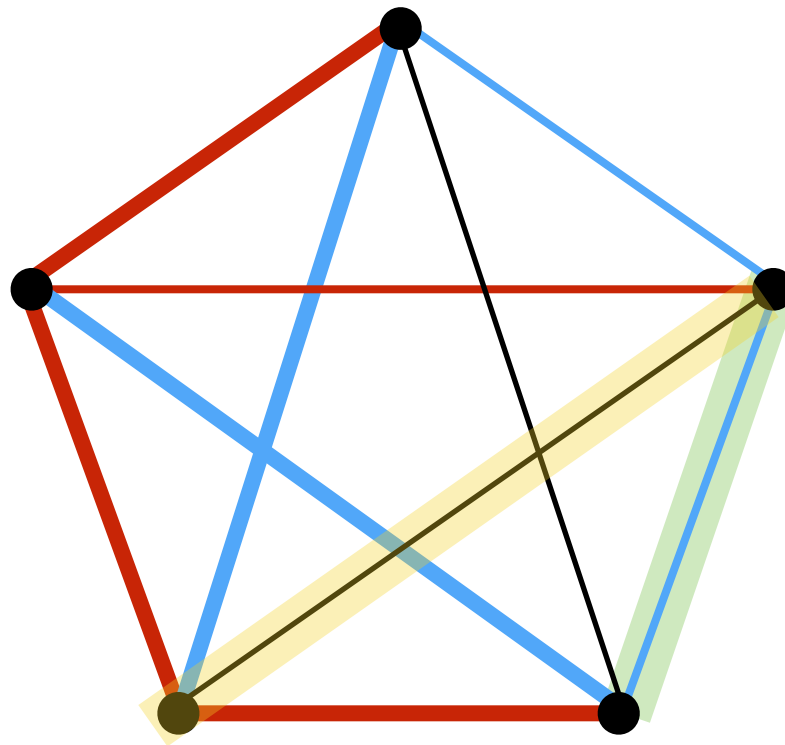
Acertijo 1

Colorea las aristas de K_5 con dos colores de tal forma que no exista ningún triángulo monocromático.



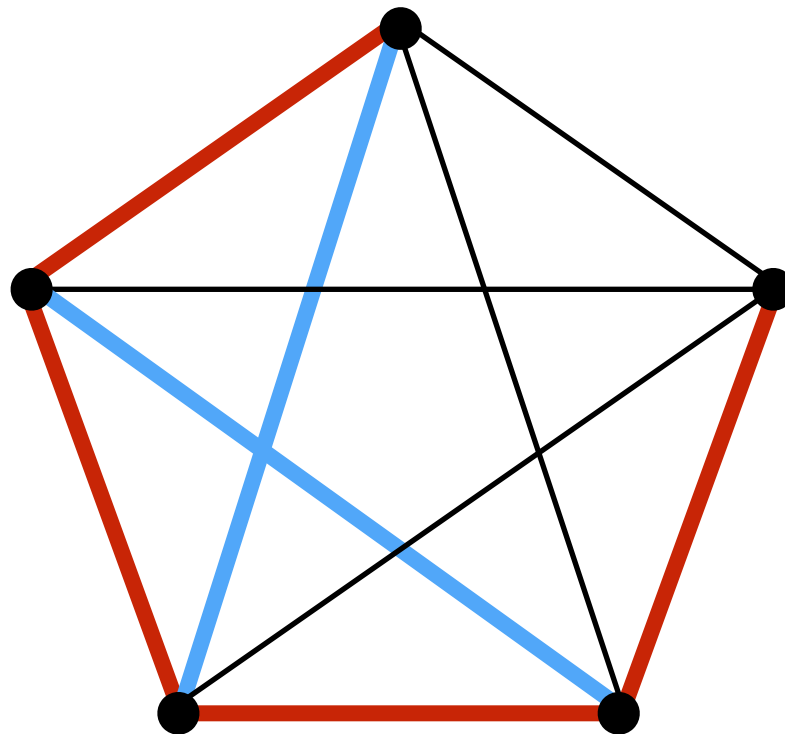
Acertijo 1

Colorea las aristas de K_5 con dos colores de tal forma que no exista ningún triángulo monocromático.



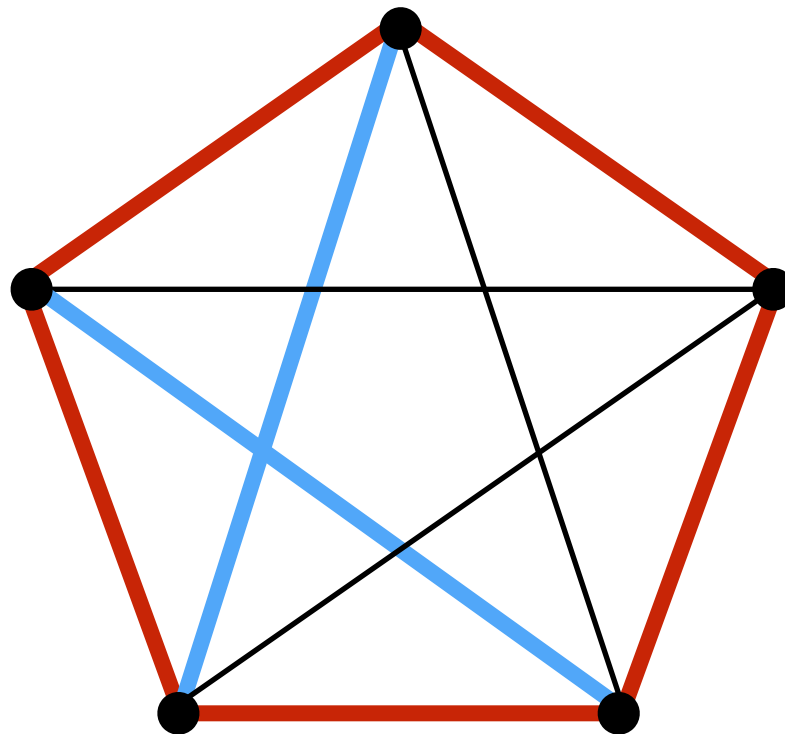
Acertijo 1

Colorea las aristas de K_5 con dos colores de tal forma que no exista ningún triángulo monocromático.



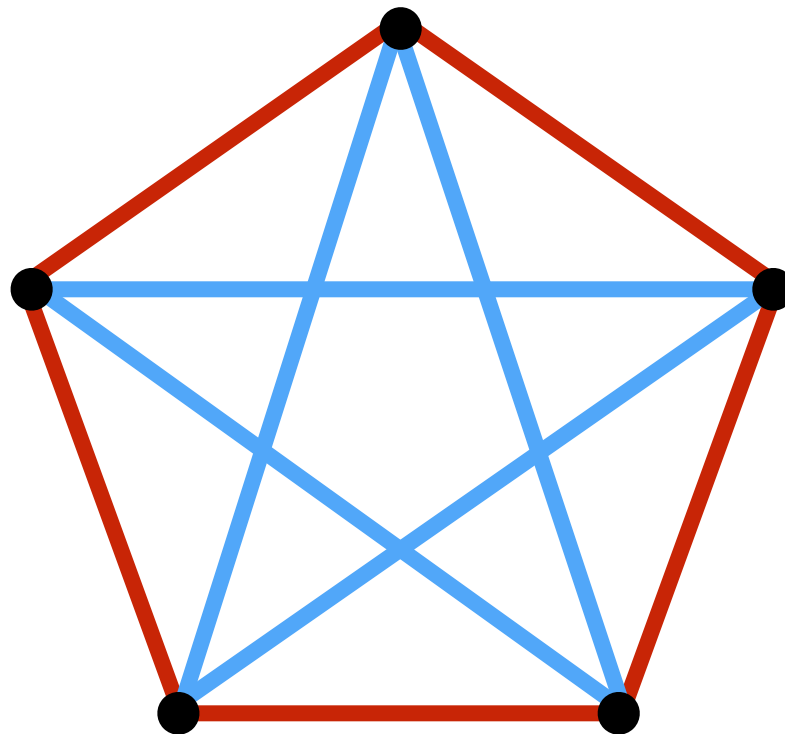
Acertijo 1

Colorea las aristas de K_5 con dos colores de tal forma que no exista ningún triángulo monocromático.



Acertijo 1

Colorea las aristas de K_5 con dos colores de tal forma que no exista ningún triángulo monocromático.



Teorema de Ramsey

Dados $n \geq 6$ y una bicoloración de las aristas de K_n , siempre existe un triángulo monocromático.

Teorema de Ramsey ($k = 3$)

Dados $n \geq 6$ y una bicoloración de las aristas de K_n , siempre existe un triángulo monocromático.

Teorema de Ramsey (general)

Para todo entero $k \geq 1$, existe un número finito $R(k)$, tal que, si $n \geq R(k)$, entonces en toda bicoloración de las aristas de K_n existe una subgráfica K_k monocromática.

Frank P. Ramsey

(Cambridge 1903 - Londres 1930)



- filósofo, matemático, economista
- estudió matemáticas en el Trinity College, Cambridge
- **1924**: fue becado por el King's College, Cambridge
- **1926**: es nombrado profesor universitario del King's College
- **1928**: publica "On a problem of formal logic" (lema $\rightarrow$ Teorema de Ramsey)

- El Teorema de Ramsey es un importante resultado en Combinatoria.
- La filosofía del Teorema de Ramsey se extendió a otras áreas de las matemáticas: *teo. de números, geometría, teoría ergódica, topología, teo. de conjuntos, etc.*



Teoría de Ramsey

Filosofía:

“Dentro del caos siempre hay algo de orden.”

Teorema de Ramsey

Para todo entero $k \geq 1$, existe un número finito $R(k)$, tal que, si $n \geq R(k)$, entonces en toda bicoloración de las aristas de K_n existe una subgráfica K_k monocromática.

Teorema de Ramsey (s=t)

Para todo entero $k \geq 1$, existe un número finito $R(k)$, tal que, si $n \geq R(k)$, entonces en toda bicoloración de las aristas de K_n existe una subgráfica K_k monocromática.

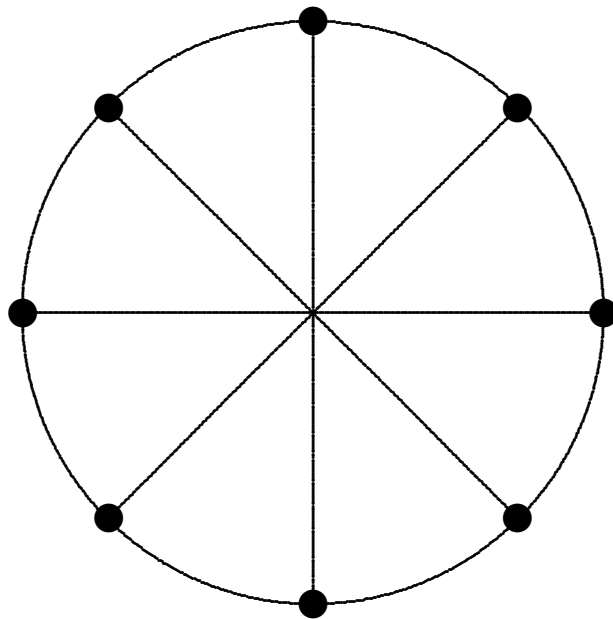
Teorema de Ramsey (general)

Para todo par de enteros $s, t \geq 1$, existe un número finito $R(s, t)$, tal que, si $n \geq R(s, t)$, entonces en toda coloración de las aristas de K_n con dos colores (azul y rojo) existe una subgráfica K_s azul o una subgráfica K_t roja.

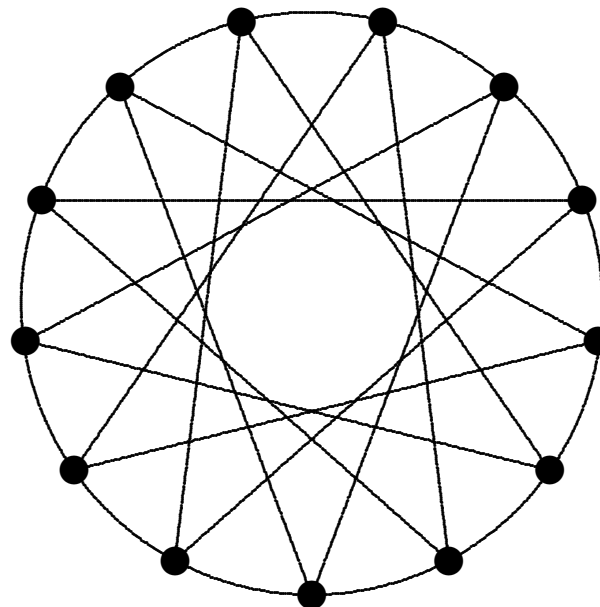
Números de Ramsey $R(s,t)$

r, s	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	1	3	6	9	14	18	23	28	36	40–42
4	1	4	9	18	25	36–41	49–61	58–84	73–115	92–149
5	1	5	14	25	43–49	58–87	80–143	101–216	126–316	144–442
6	1	6	18	36–41	58–87	102–165	113–298	132–495	169–780	179–1171
7	1	7	23	49–61	80–143	113–298	205–540	217–1031	241–1713	289–2826
8	1	8	28	58–84	101–216	132–495	217–1031	282–1870	317–3583	331–6090
9	1	9	36	73–115	126–316	169–780	241–1713	317–3583	565–6588	581–12677
10	1	10	40–42	92–149	144–442	179–1171	289–2826	331–6090	581–12677	798–23556

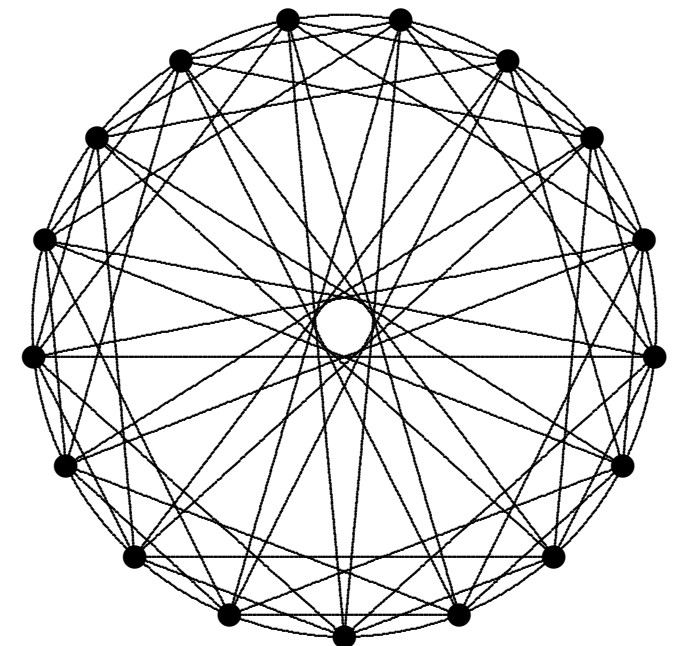
Gráficas de Ramsey



$R(3,4)$



$R(3,5)$



$R(4,4)$

Acertijo 2

Colorea los números del **1 al 8** con **2** colores de tal forma que no haya ninguna progresión aritmética monocromática de longitud 3.

1 2 3 4 5 6 7 8

Acertijo 2

Colorea los números del **1 al 8** con **2** colores de tal forma que no haya ninguna progresión aritmética monocromática de longitud 3.

1 **2** 3 4 5 6 7 8

Acertijo 2

Colorea los números del **1 al 8** con **2** colores de tal forma que no haya ninguna progresión aritmética monocromática de longitud 3.

1 **2** **3** 4 5 6 7 8

Acertijo 2

Colorea los números del **1 al 8** con **2** colores de tal forma que no haya ninguna progresión aritmética monocromática de longitud 3.

1 **2** **3** **4** 5 6 7 8

Acertijo 2

Colorea los números del **1 al 8** con **2** colores de tal forma que no haya ninguna progresión aritmética monocromática de longitud 3.

1 **2** **3** **4** **5** 6 7 8

Acertijo 2

Colorea los números del **1 al 8** con **2** colores de tal forma que no haya ninguna progresión aritmética monocromática de longitud 3.

1 **2** **3** **4** **5** 6 7 **8**

Acertijo 2

Colorea los números del **1 al 8** con **2** colores de tal forma que no haya ninguna progresión aritmética monocromática de longitud 3.

1 **2** **3** **4** **5** **6** 7 **8**

Acertijo 2

Colorea los números del **1 al 8** con **2** colores de tal forma que no haya ninguna progresión aritmética monocromática de longitud 3.

1 2 3 4 5 6 7 8

Acertijo 2

Colorea los números del **1 al 8** con **2** colores de tal forma que no haya ninguna progresión aritmética monocromática de longitud 3.

1 **2** **3** **4** **5** **6** **7** **8** 9

Acertijo 2

Colorea los números del **1 al 9** con **2** colores de tal forma que no haya ninguna progresión aritmética monocromática de longitud 3.

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Acertijo 2

Colorea los números del **1 al 9** con **2** colores de tal forma que no haya ninguna progresión aritmética monocromática de longitud 3.

1 **2** **3** **4** **5** **6** **7** **8** **9**

Acertijo 2

Colorea los números del **1 al 9** con **2** colores de tal forma que no haya ninguna progresión aritmética monocromática de longitud 3.

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Acertijo 2

Colorea los números del **1 al 9** con **2** colores de tal forma que no haya ninguna progresión aritmética monocromática de longitud 3.

1 **2** **3** **4** **5** **6** **7** **8** **9**

Acertijo 2

Colorea los números del **1 al 9** con **2** colores de tal forma que no haya ninguna progresión aritmética monocromática de longitud 3.

1 2 3 4 5 6 7 8 9

**¡¡NO SE
PUEDE!!**

Teorema de Van der Waerden ($r=2$, $k=3$)

Si $n \geq 9$, entonces toda coloración de los números del **1** al n con **2** colores tiene una progresión aritmética de longitud **3** monocromática.

Teorema de Van der Waerden ($r=2$, $k=3$)

Si $n \geq 9$, entonces toda coloración de los números del **1** al **n** con **2** colores tiene una progresión aritmética de longitud **3** monocromática.

Teorema de Van der Waerden (general)

Para todo par de enteros r y k , existe un número $W(r,k)$ tal que, si $n \geq W(r,k)$, entonces toda coloración de los números **1,2,..., n** con r colores tiene una progresión aritmética de longitud k monocromática.

Números de Van der Waerden $W(r,k)$

$k \backslash r$	2 colors	3 colors	4 colors	5 colors	6 colors
3	9 ^[2]	27 ^[2]	76 ^[3]	>170	>223
4	35 ^[2]	293 ^[4]	>1,048	>2,254	>9,778
5	178 ^[5]	>2,173	>17,705	>98,740	>98,748
6	1,132 ^[6]	>11,191	>91,331	>540,025	>816,981
7	>3,703	>48,811	>420,217	>1,381,687	>7,465,909
8	>11,495	>238,400	>2,388,317	>10,743,258	>57,445,718
9	>41,265	>932,745	>10,898,729	>79,706,009	>458,062,329 ^[7]
10	>103,474	>4,173,724	>76,049,218	>542,694,970 ^[7]	>2,615,305,384 ^[7]
11	>193,941	>18,603,731	>305,513,57 ^[7]	>2,967,283,511 ^[7]	>3,004,668,671 ^[7]

Estructuras balanceadas

Filosofía

Dada casi cualquier coloración de una estructura suficientemente grande, queremos encontrar que siempre exista cierta subestructura balanceada.

Filosofía

Dada casi cualquier coloración de una estructura suficientemente grande, queremos encontrar que siempre exista cierta subestructura **balanceada**.

→ balanceada = con el mismo número de elementos de cada color

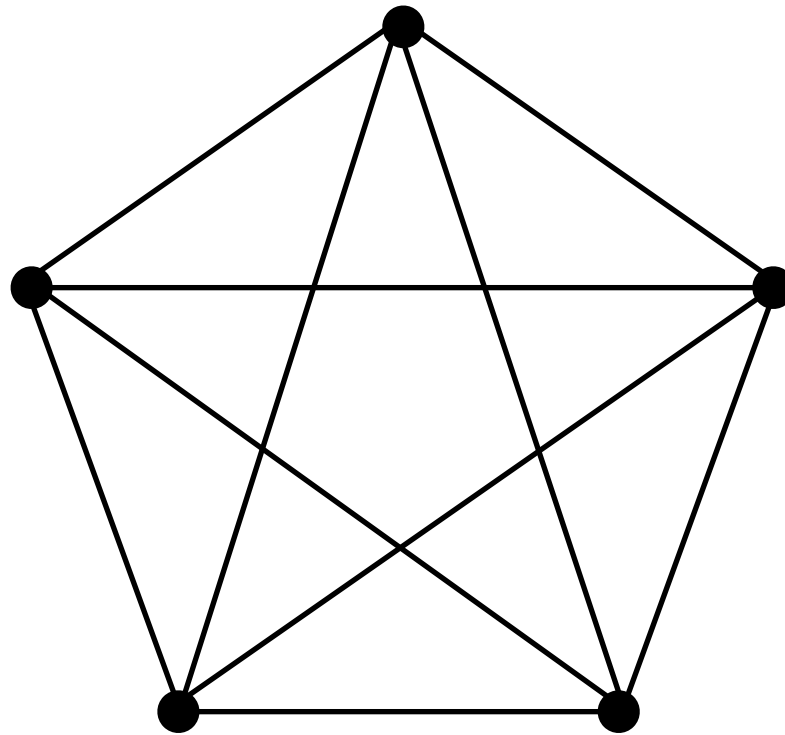
Filosofía

Dada **casi** cualquier coloración de una estructura suficientemente grande, queremos encontrar que siempre exista cierta subestructura **balanceada**.

- balanceada = con el mismo número de elementos de cada color
- Necesitamos garantizar que siempre haya un número mínimo de elementos de cada color.

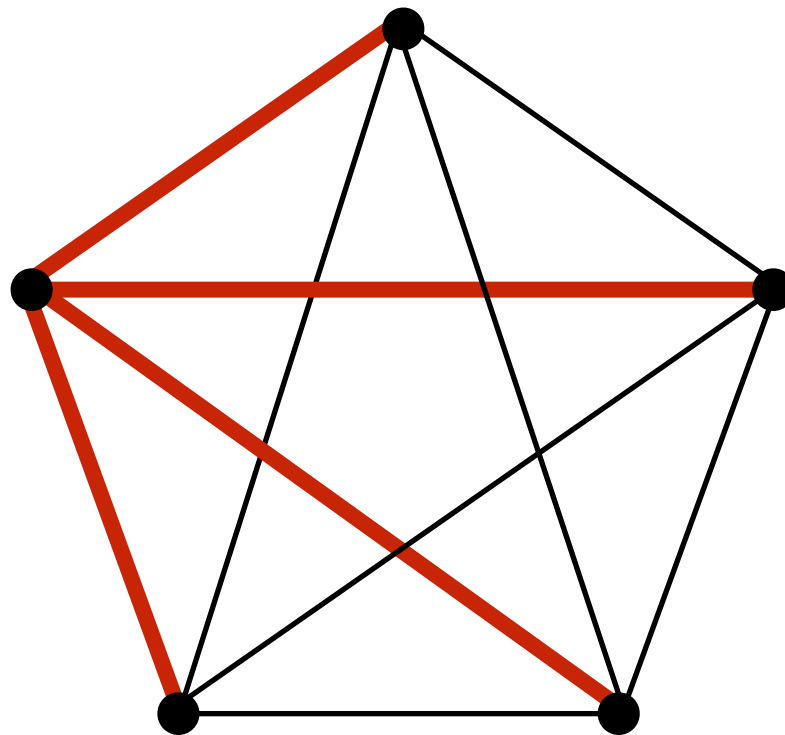
Acertijo 3

Encuentra una bicoloración de las aristas de K_5 con al menos **4** aristas de cada color tal que no haya ninguna K_4 balanceada.



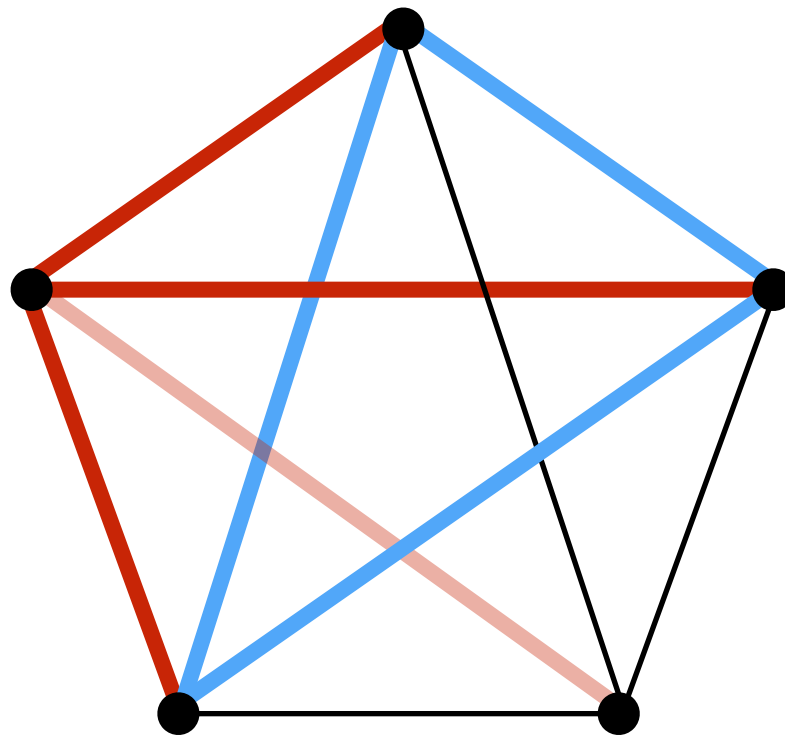
Acertijo 3

Encuentra una bicoloración de las aristas de K_5 con al menos **4** aristas de cada color tal que no haya ninguna K_4 balanceada.



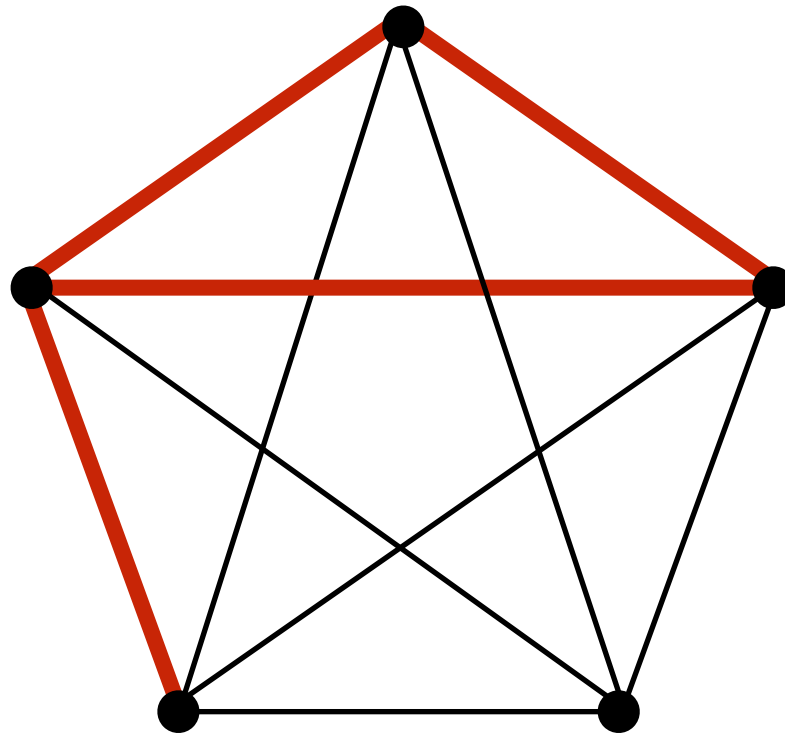
Acertijo 3

Encuentra una bicoloración de las aristas de K_5 con al menos **4** aristas de cada color tal que no haya ninguna K_4 balanceada.



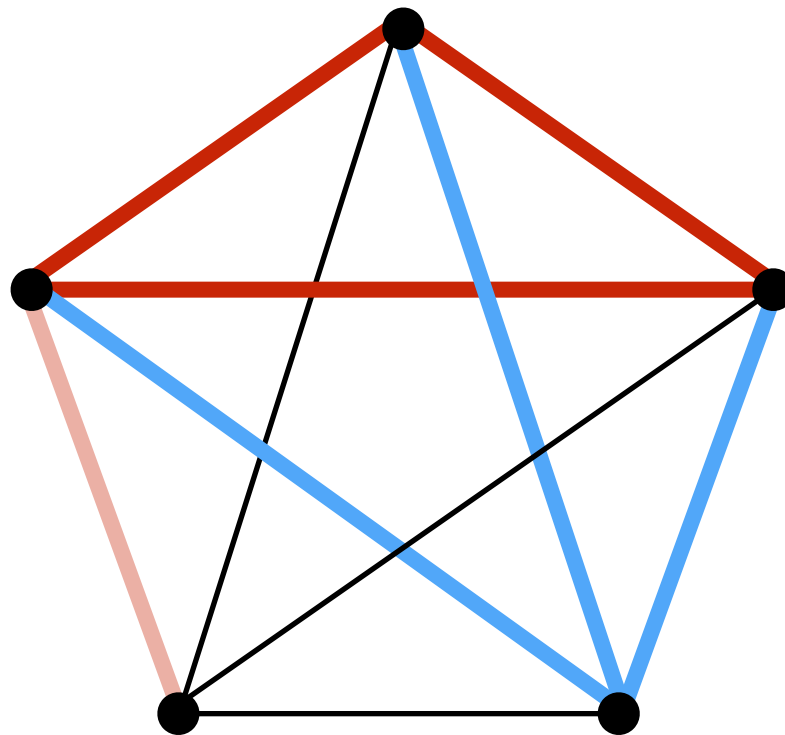
Acertijo 3

Encuentra una bicoloración de las aristas de K_5 con al menos **4** aristas de cada color tal que no haya ninguna K_4 balanceada.



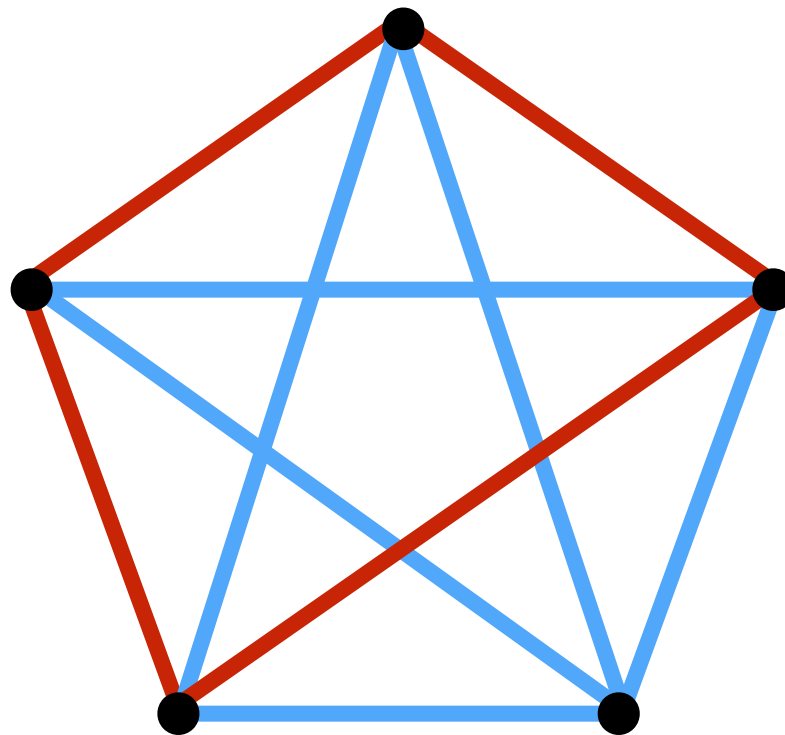
Acertijo 3

Encuentra una bicoloración de las aristas de K_5 con al menos **4** aristas de cada color tal que no haya ninguna K_4 balanceada.



Acertijo 3

Encuentra una bicoloración de las aristas de K_5 con al menos **4** aristas de cada color tal que no haya ninguna K_4 balanceada.

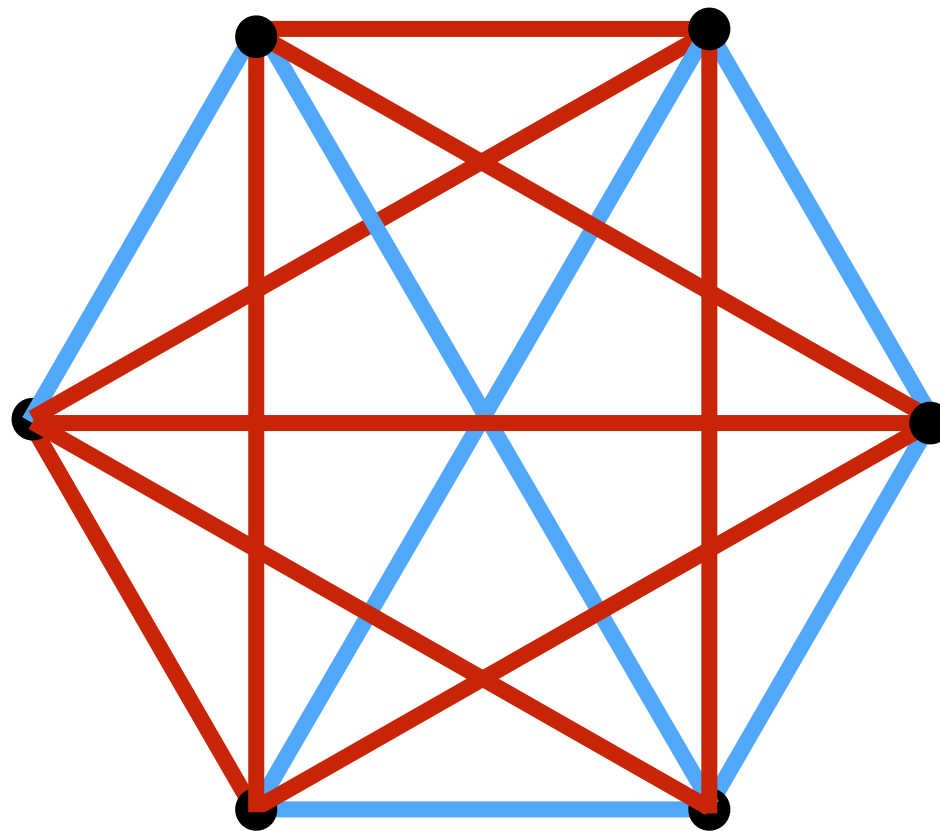


Teorema (CHM)

Si $n \geq 5$, entonces existe un entero **$h(n)$** tal que cualquier bicoloración de las aristas de K_n con al menos **$h(n)$** aristas de cada color contiene una K_4 balanceada.

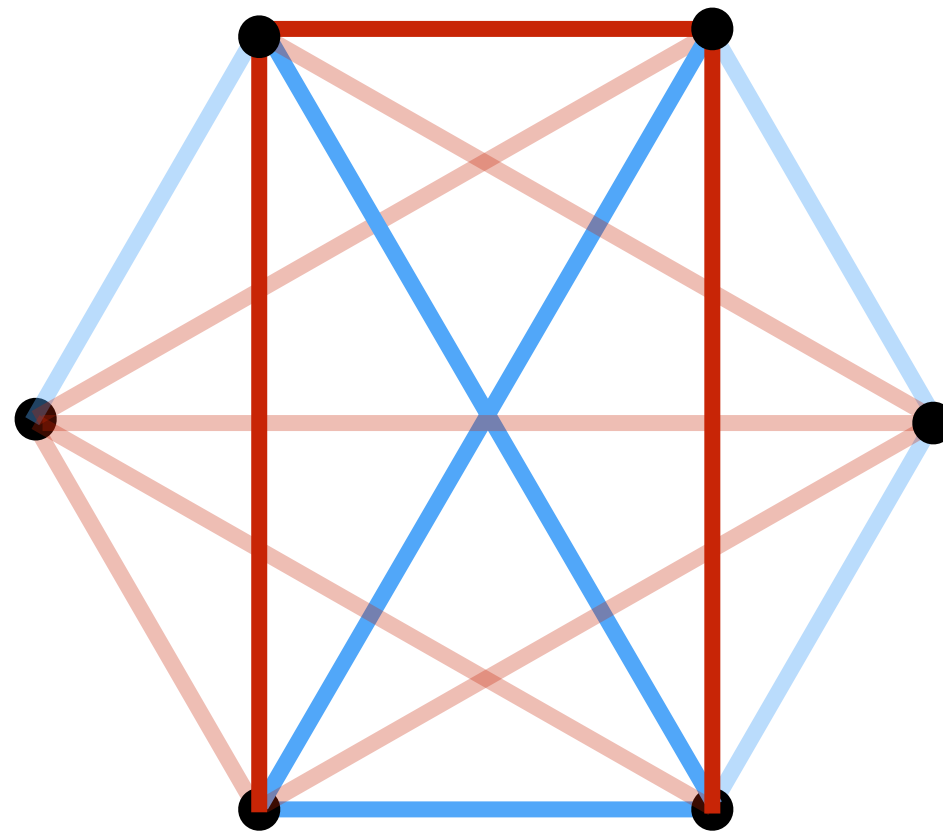
Teorema (CHM)

Si $n \geq 5$, entonces existe un entero **$h(n)$** tal que cualquier bicoloración de las aristas de K_n con al menos **$h(n)$** aristas de cada color contiene una K_4 balanceada.



Teorema (CHM)

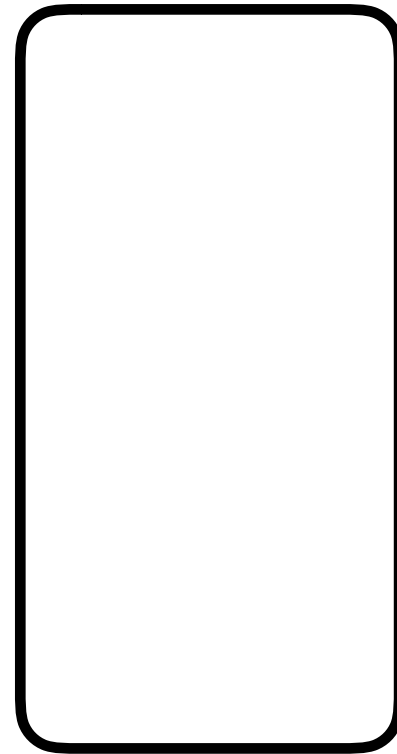
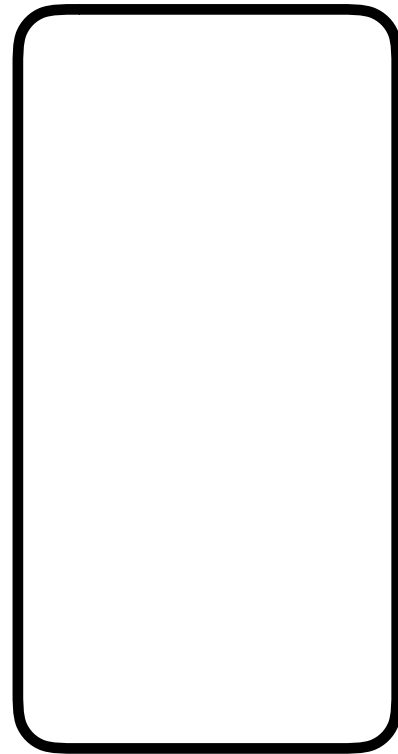
Si $n \geq 5$, entonces existe un entero **$h(n)$** tal que cualquier bicoloración de las aristas de K_n con al menos **$h(n)$** aristas de cada color contiene una K_4 balanceada.



¿Podremos dar un teorema similar para K_5 ?

¿Podremos dar un teorema similar para K_5 ?

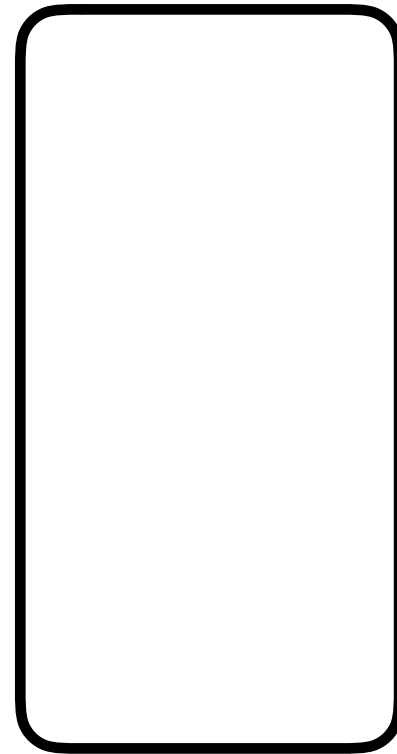
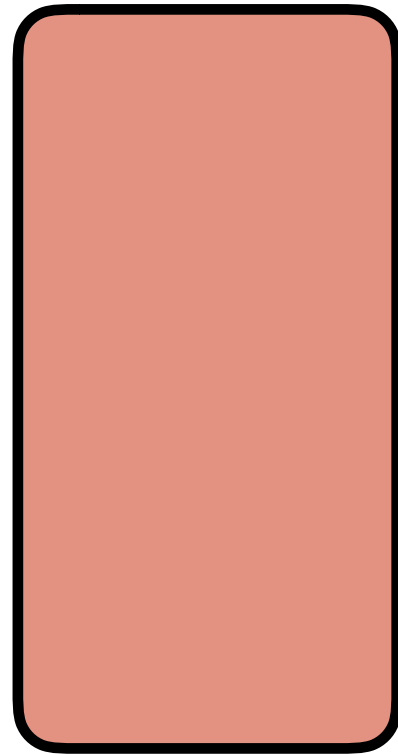
NO:



K_n

¿Podremos dar un teorema similar para K_5 ?

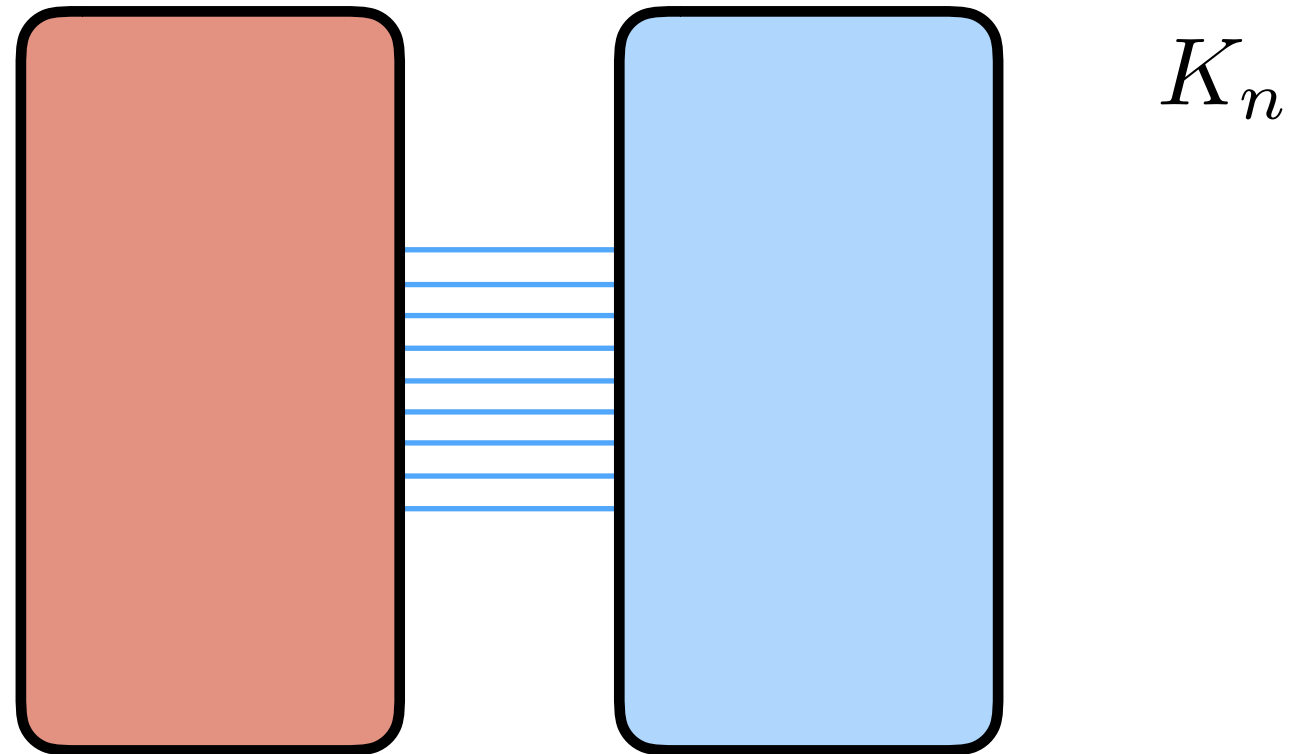
NO:



K_n

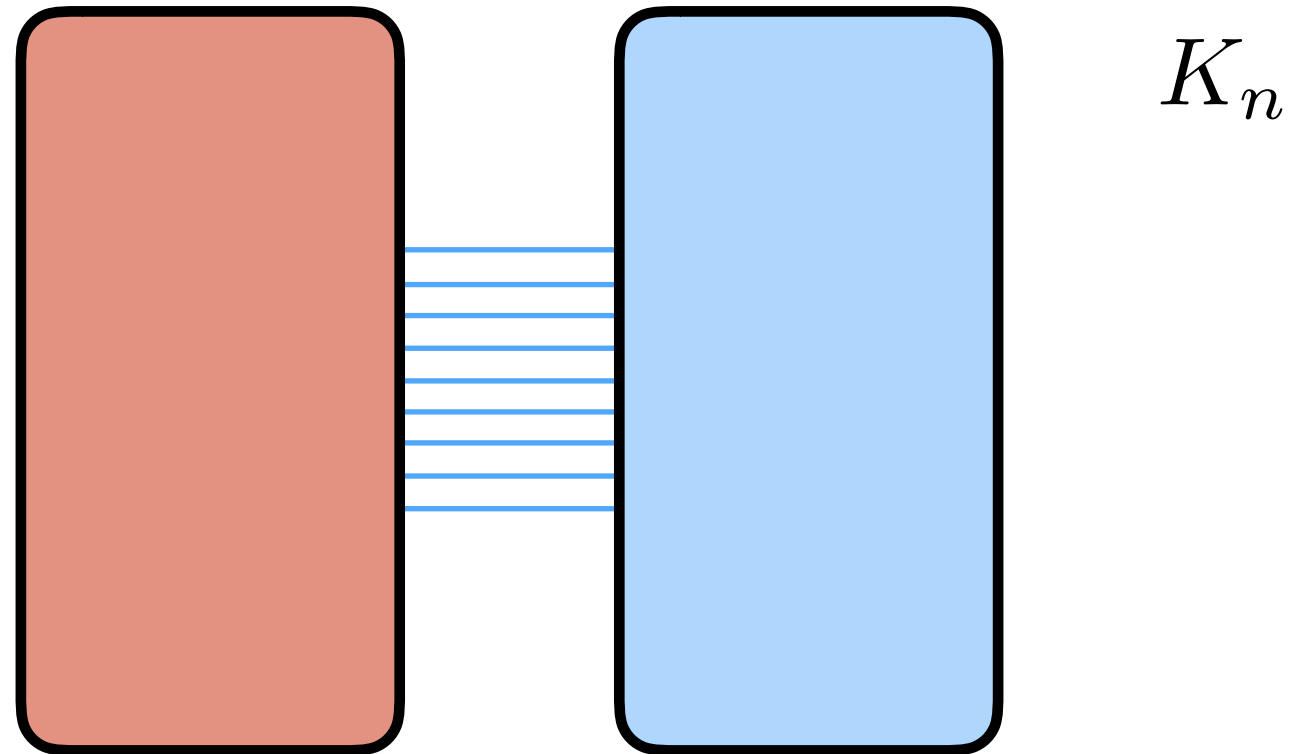
¿Podremos dar un teorema similar para K_5 ?

NO:



¿Podremos dar un teorema similar para K_5 ?

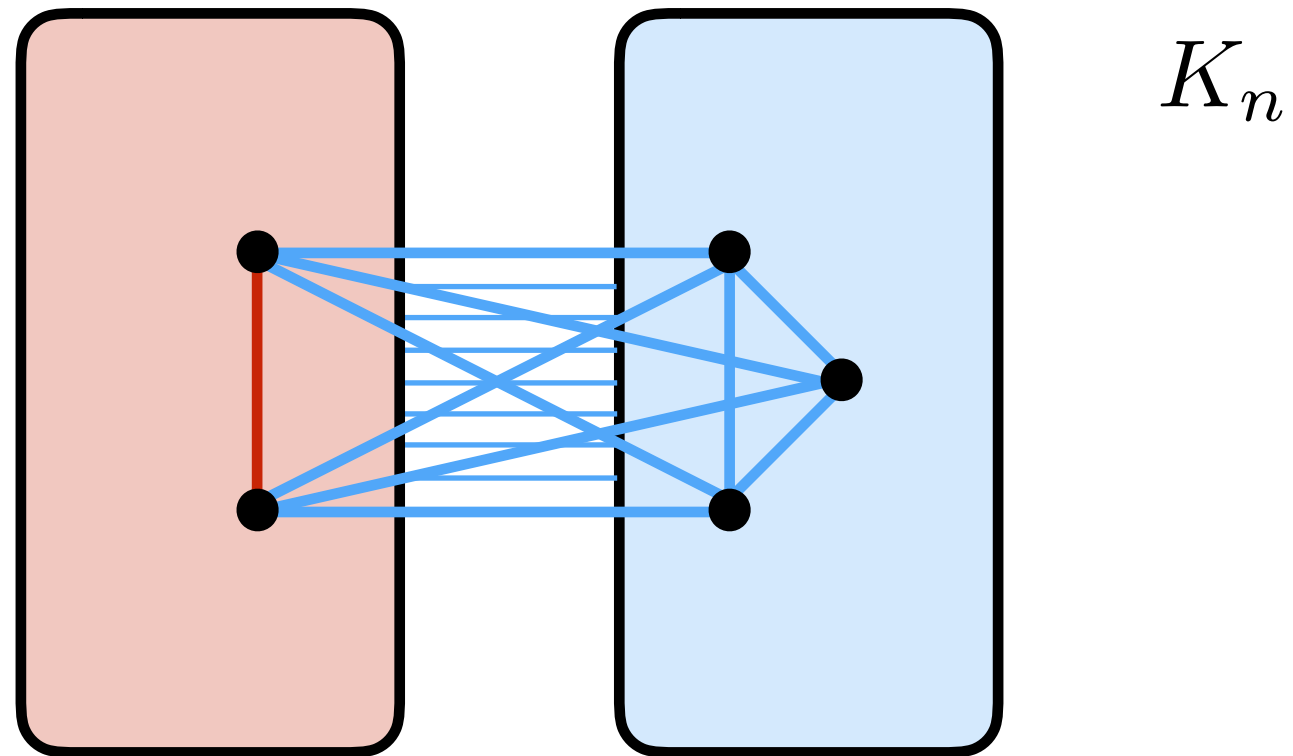
NO:



la mitad de las aristas de color rojo,
la mitad de azul

¿Podremos dar un teorema similar para K_5 ?

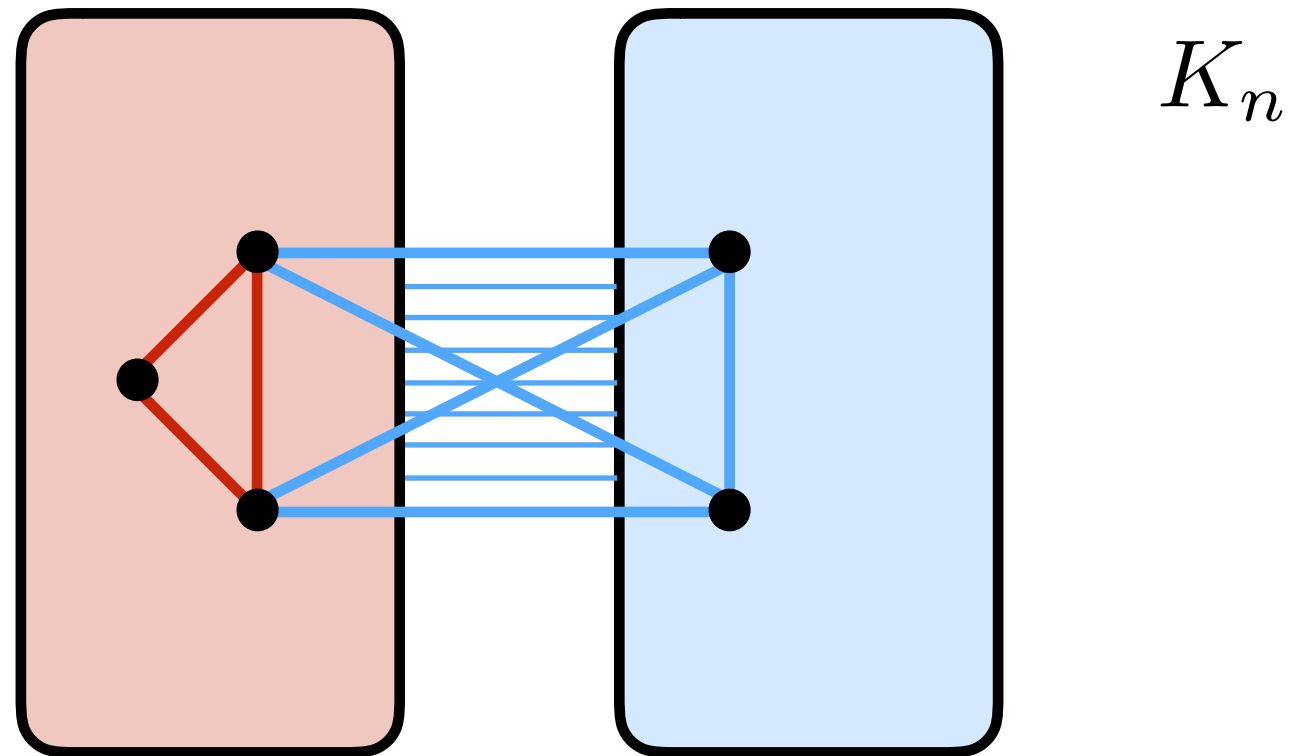
NO:



la mitad de las aristas de color rojo,
la mitad de azul

¿Podremos dar un teorema similar para K_5 ?

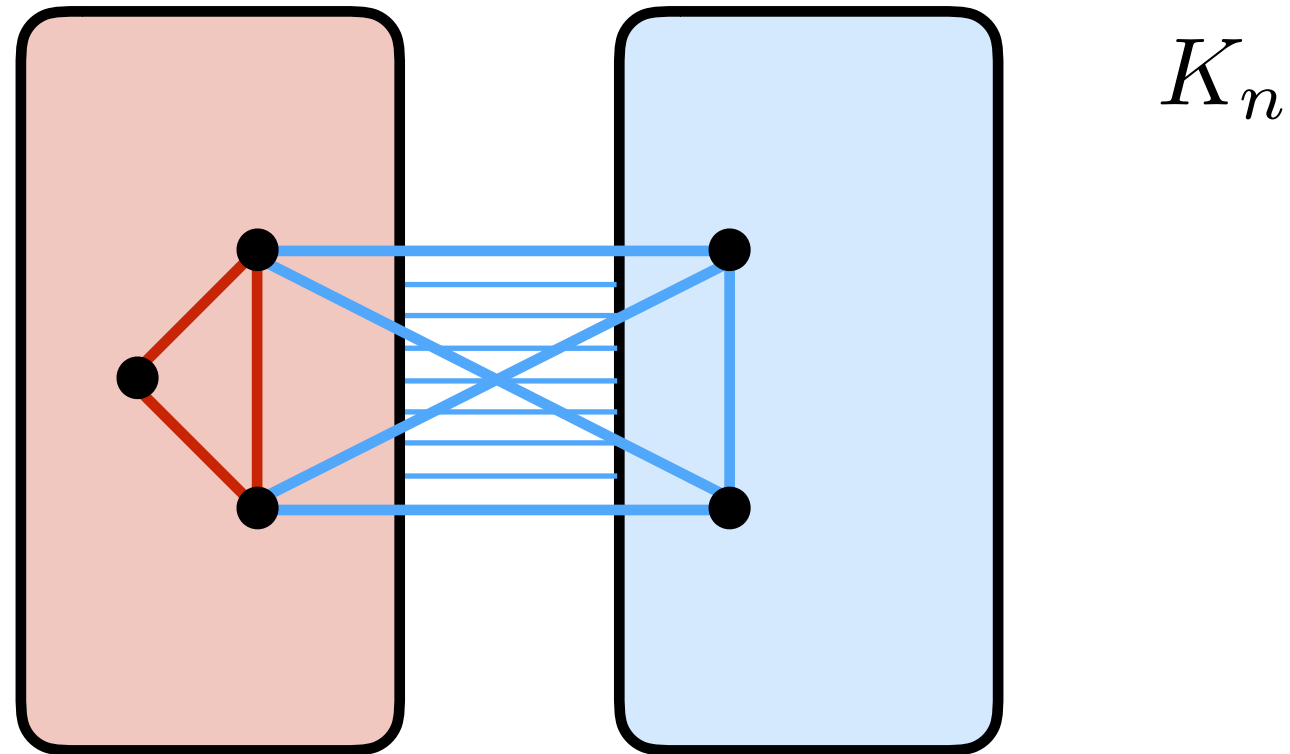
NO:



la mitad de las aristas de color rojo,
la mitad de azul

¿Podremos dar un teorema similar para K_5 ?

NO:



la mitad de las aristas de color rojo,
la mitad de azul

Así sucede para una infinidad de n 's.

Otros ejemplos donde sí funciona:

Si

- *n es suficientemente grande*
- *el número de aristas de cada color es suficientemente grande,*

Otros ejemplos donde sí funciona:

Si

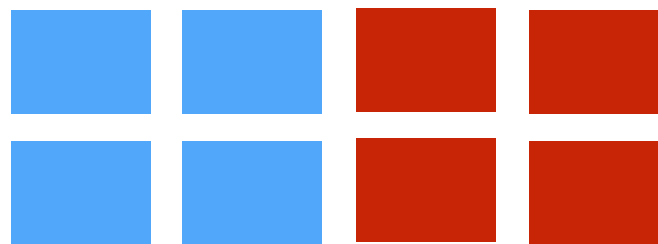
- *n es suficientemente grande*
- *el número de aristas de cada color es suficientemente grande,*

existe una copia balanceada de

- una trayectoria de longitud $2k$
- una estrella con $2k$ puntas
- cualquier gráfica con 4 aristas
- ...

Acertijo 4

Ordena 4 bloques azules y 4 rojos de tal forma que no haya 6 bloques consecutivos que contengan 3 rojos y 3 azules (en el orden que sea).



Acertijo 4

Ordena **4** bloques azules y **4** rojos de tal forma que **no** haya **6** bloques consecutivos con 3 rojos y 3 azules (en el orden que sea).



NO

Acertijo 4

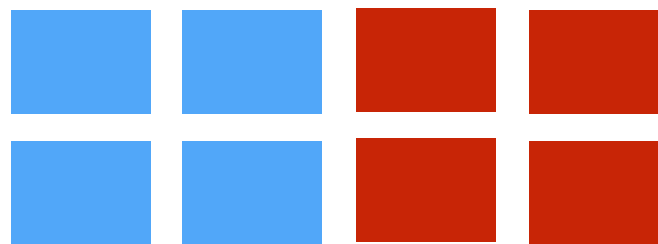
Ordena **4** bloques azules y **4** rojos de tal forma que **no** haya **6** bloques consecutivos con 3 rojos y 3 azules (en el orden que sea).



NO

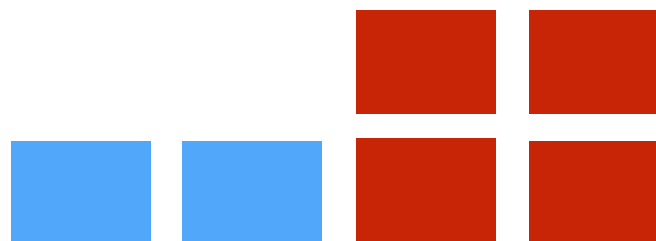
Acertijo 4

Ordena 4 bloques azules y 4 rojos de tal forma que no haya 6 bloques consecutivos que contengan 3 rojos y 3 azules (en el orden que sea).



Acertijo 4

Ordena 4 bloques azules y 4 rojos de tal forma que no haya 6 bloques consecutivos que contengan 3 rojos y 3 azules (en el orden que sea).



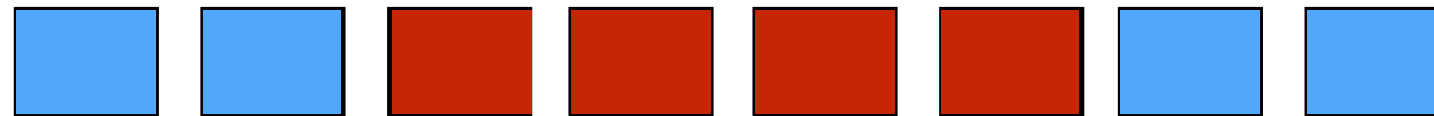
Acertijo 4

Ordena 4 bloques azules y 4 rojos de tal forma que no haya 6 bloques consecutivos que contengan 3 rojos y 3 azules (en el orden que sea).



Acertijo 4

Ordena 4 bloques azules y 4 rojos de tal forma que no haya 6 bloques consecutivos que contengan 3 rojos y 3 azules (en el orden que sea).



Acertijo 4

Ordena **5** bloques azules y **5** rojos de tal forma que **no** haya **6** bloques consecutivos con 3 rojos y 3 azules (en el orden que sea).



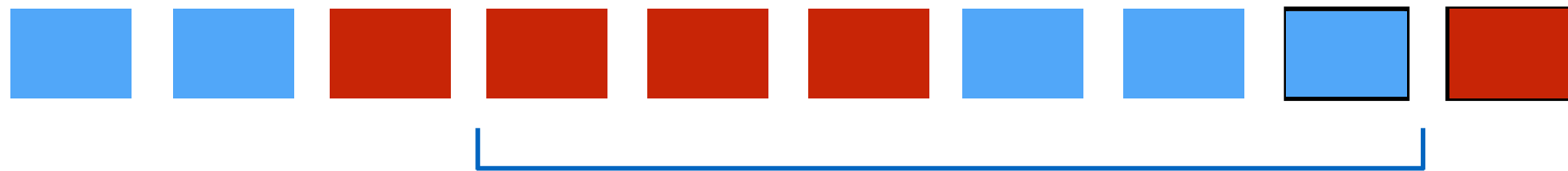
Acertijo 4

Ordena **5** bloques azules y **5** rojos de tal forma que **no** haya **6** bloques consecutivos con 3 rojos y 3 azules (en el orden que sea).



Acertijo 4

Ordena **5** bloques azules y **5** rojos de tal forma que **no** haya **6** bloques consecutivos con 3 rojos y 3 azules (en el orden que sea).



Acertijo 4

Ordena **5** bloques azules y **5** rojos de tal forma que **no** haya **6** bloques consecutivos con 3 rojos y 3 azules (en el orden que sea).



Acertijo 4

Ordena **5** bloques azules y **5** rojos de tal forma que **no** haya **6** bloques consecutivos con 3 rojos y 3 azules (en el orden que sea).



Acertijo 4

Ordena **5** bloques azules y **5** rojos de tal forma que **no** haya **6** bloques consecutivos con 3 rojos y 3 azules (en el orden que sea).



**¡¡NO SE
PUEDE!!**

Teorema (CHM)

Existe un entero $n(k)$ tal que, si $n \geq n(k)$, entonces toda secuencia de n bloques azules y n bloques rojos contiene $2k$ bloques consecutivos conformados por k bloques azules y k bloques rojos.

Otras variantes:
estructuras heterocromáticas

Otras variantes:
estructuras heterocromáticas

o

Teoría anti-Ramsey

Teorema de Jungic y Radoicic

Toda 3-coloración equipartita de los números del 1 al n contiene una progresión aritmética heterocromática.

Teorema de Jungic y Radoicic

Toda 3-coloración equipartita de los números del 1 al n contiene una progresión aritmética heterocromática.

1 2 3 4 5 6 7 8 9

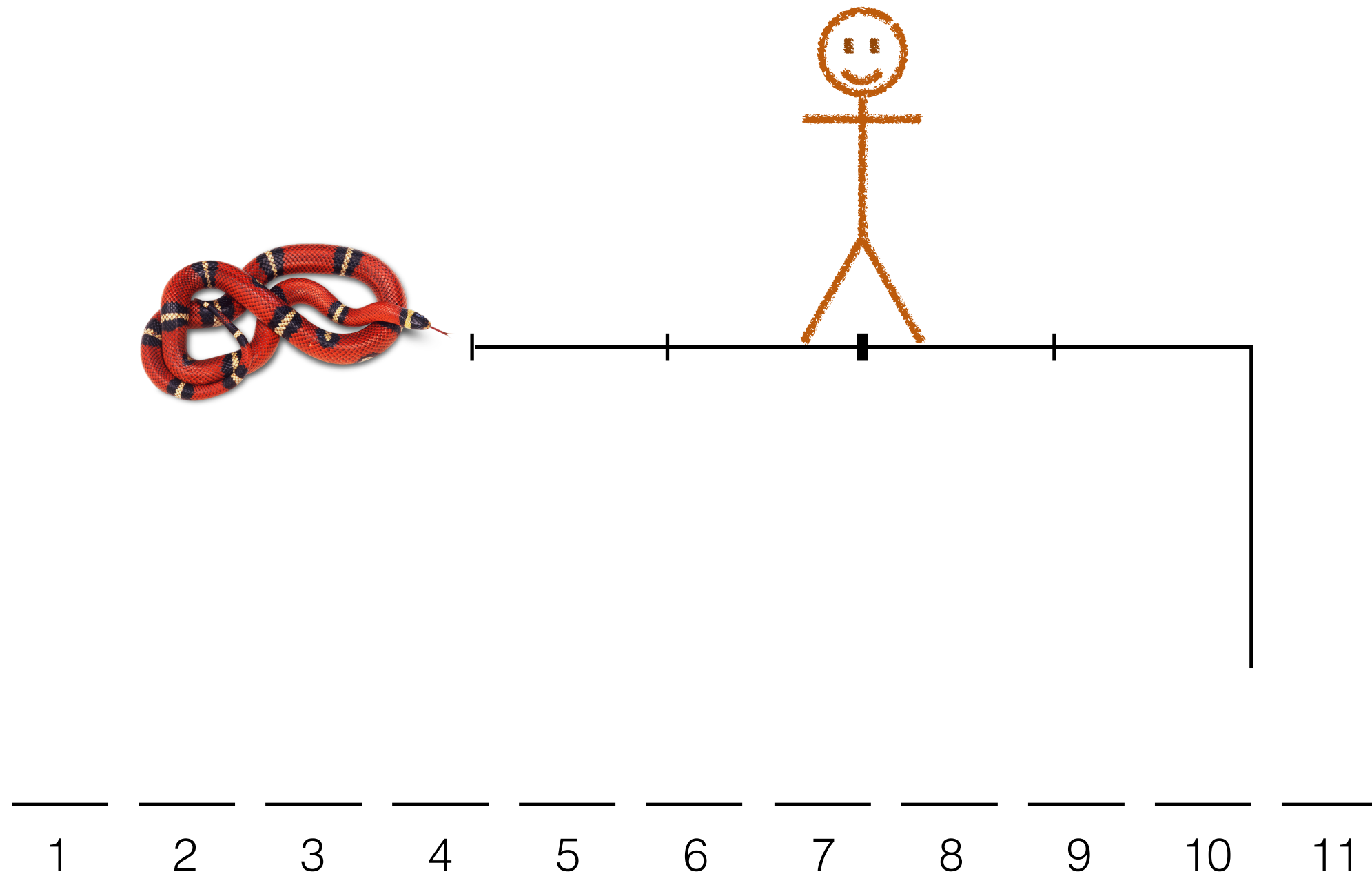
Teorema de Jungic y Radoicic

Toda 3-coloración equipartita de los números del 1 al n contiene una progresión aritmética heterocromática.

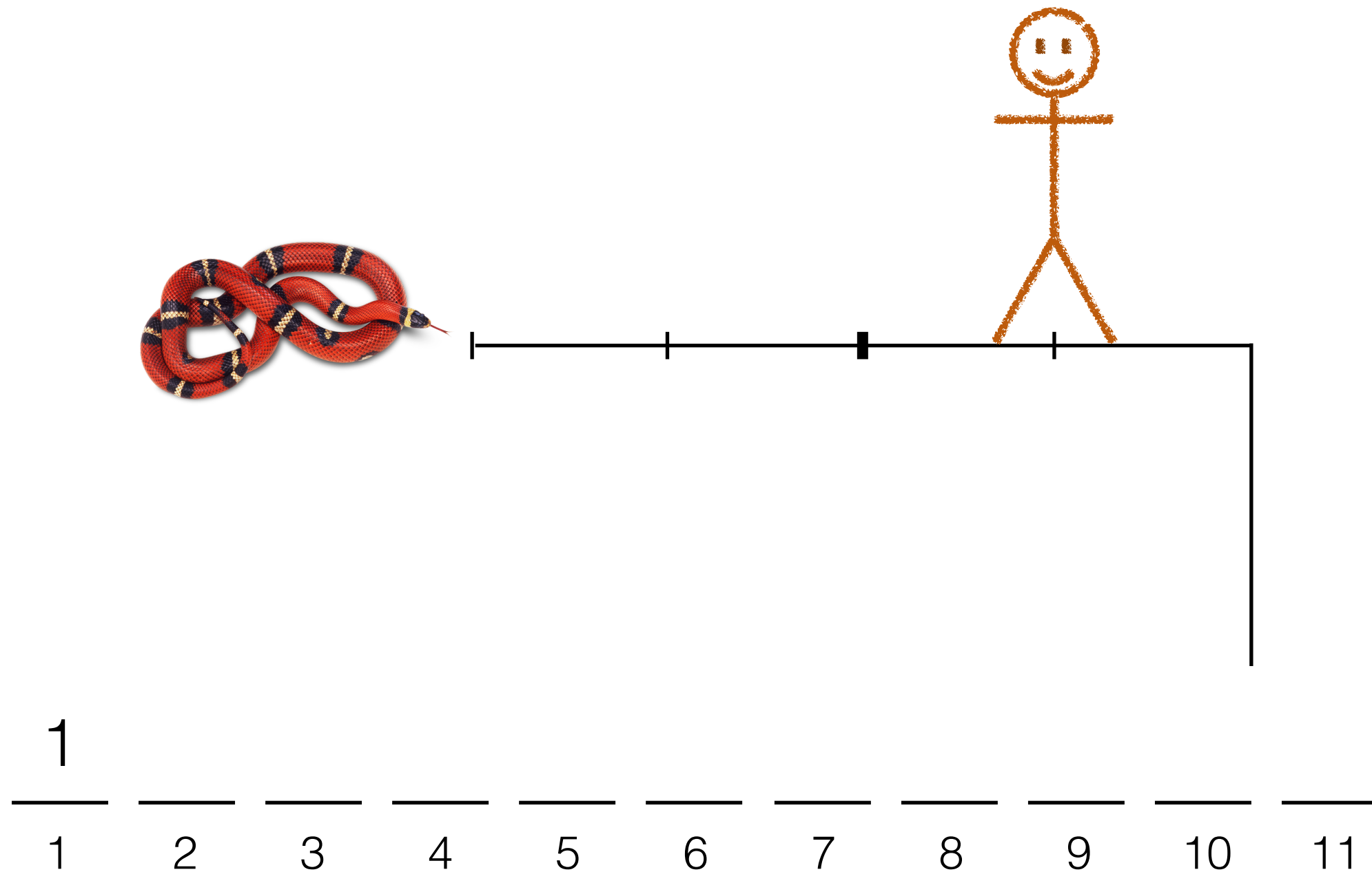
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otras variantes:
discrepancia

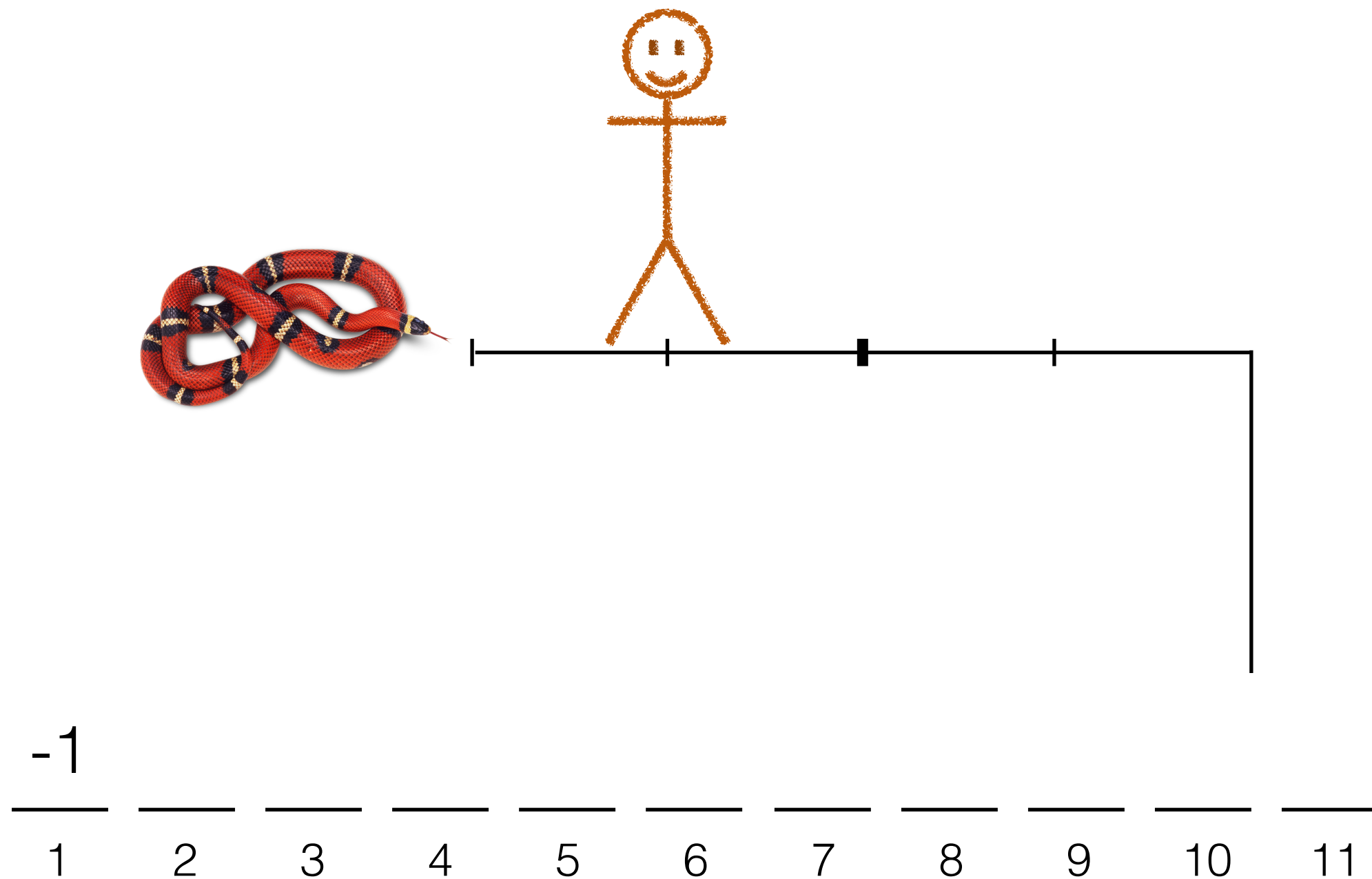
El juego del precipicio y la serpiente



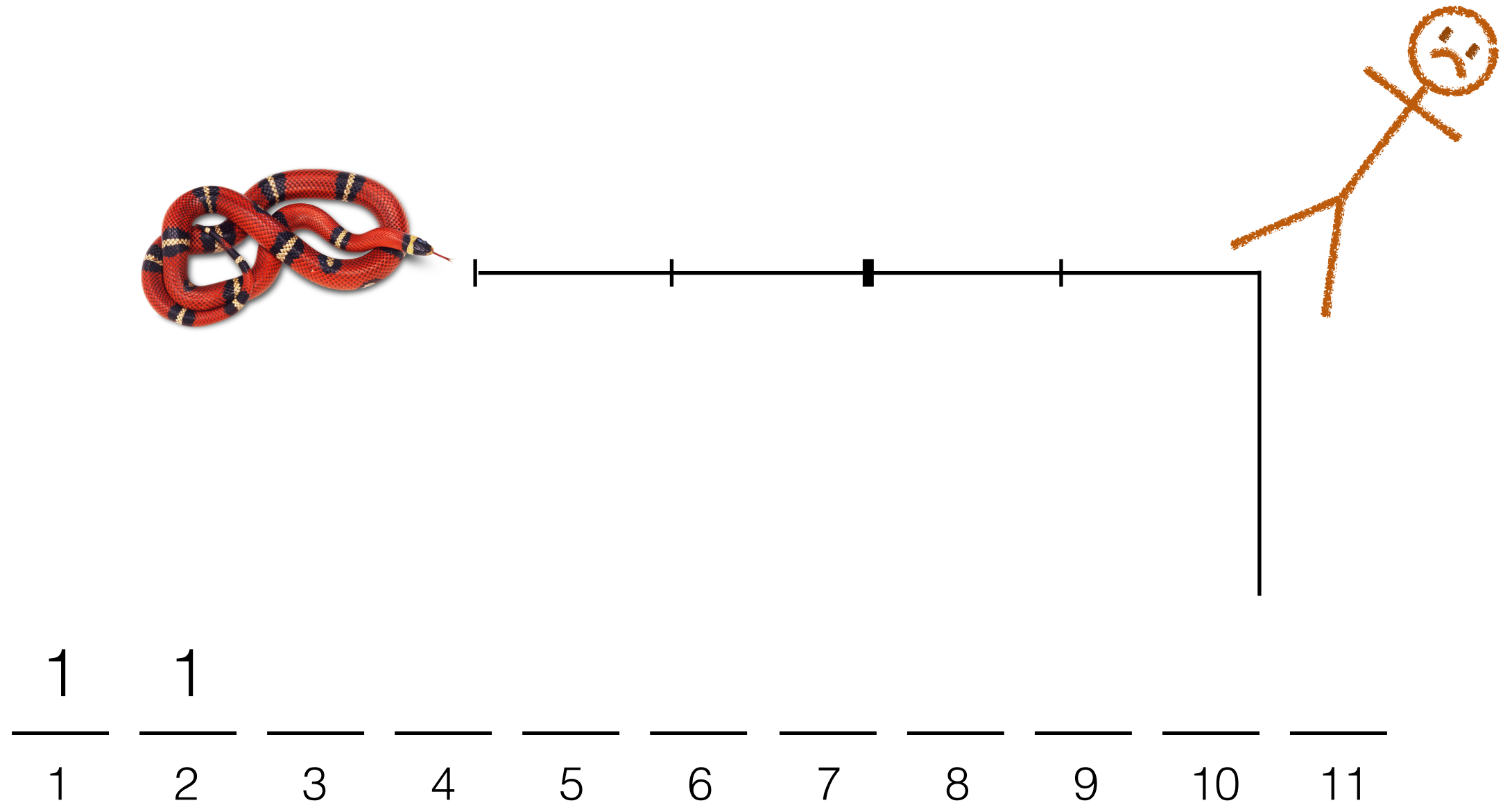
El juego del precipicio y la serpiente



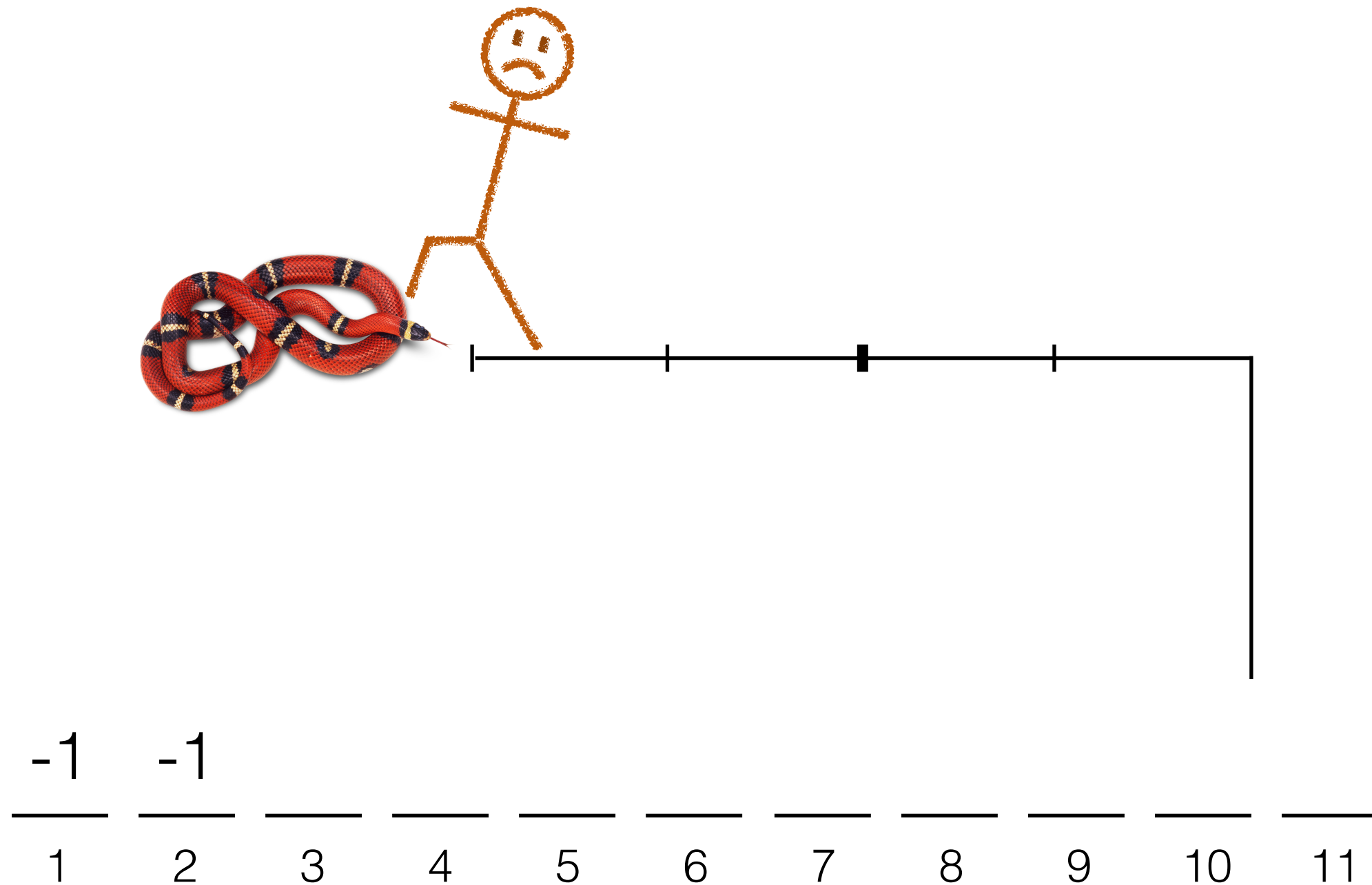
El juego del precipicio y la serpiente



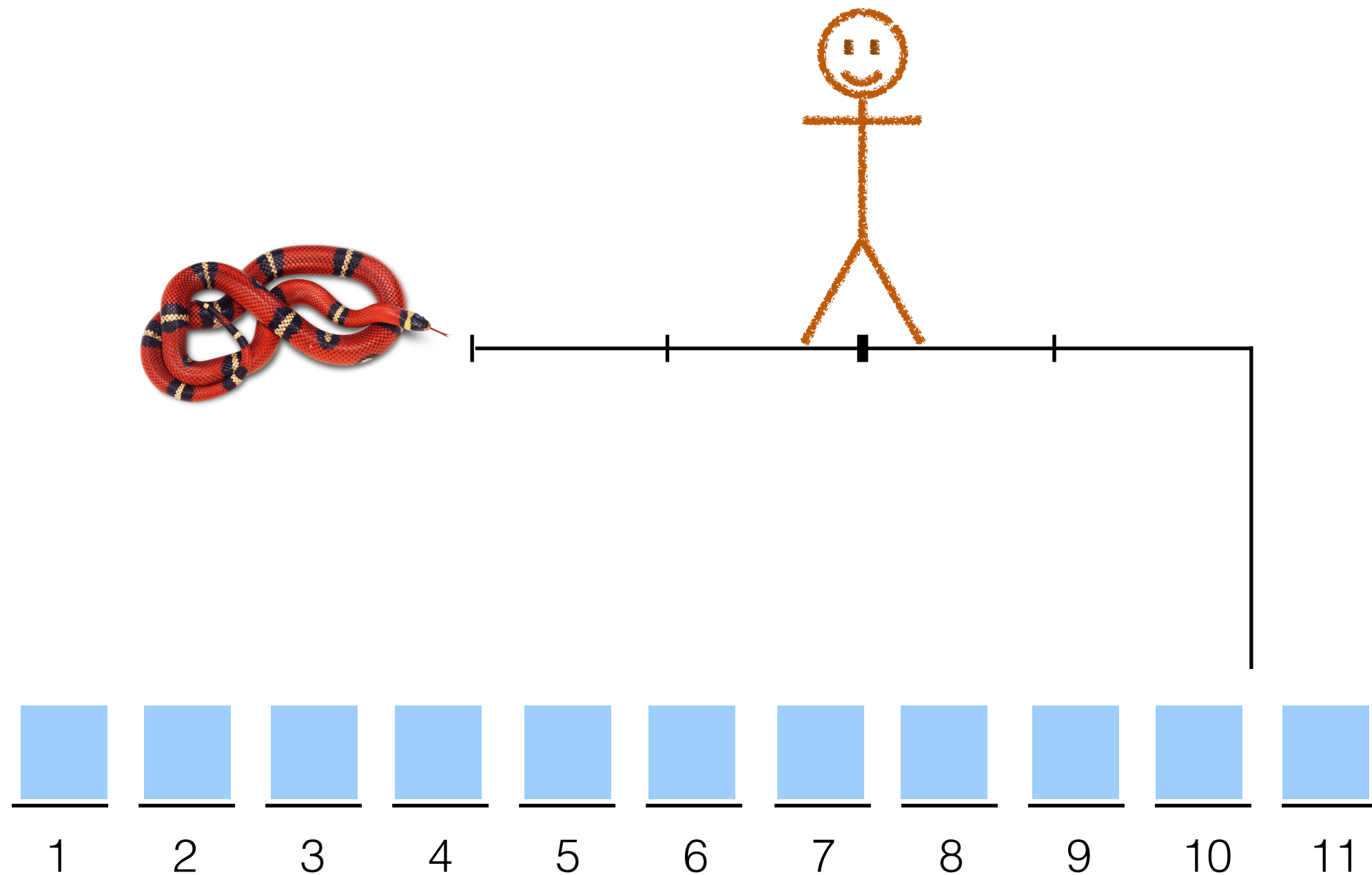
El juego del precipicio y la serpiente



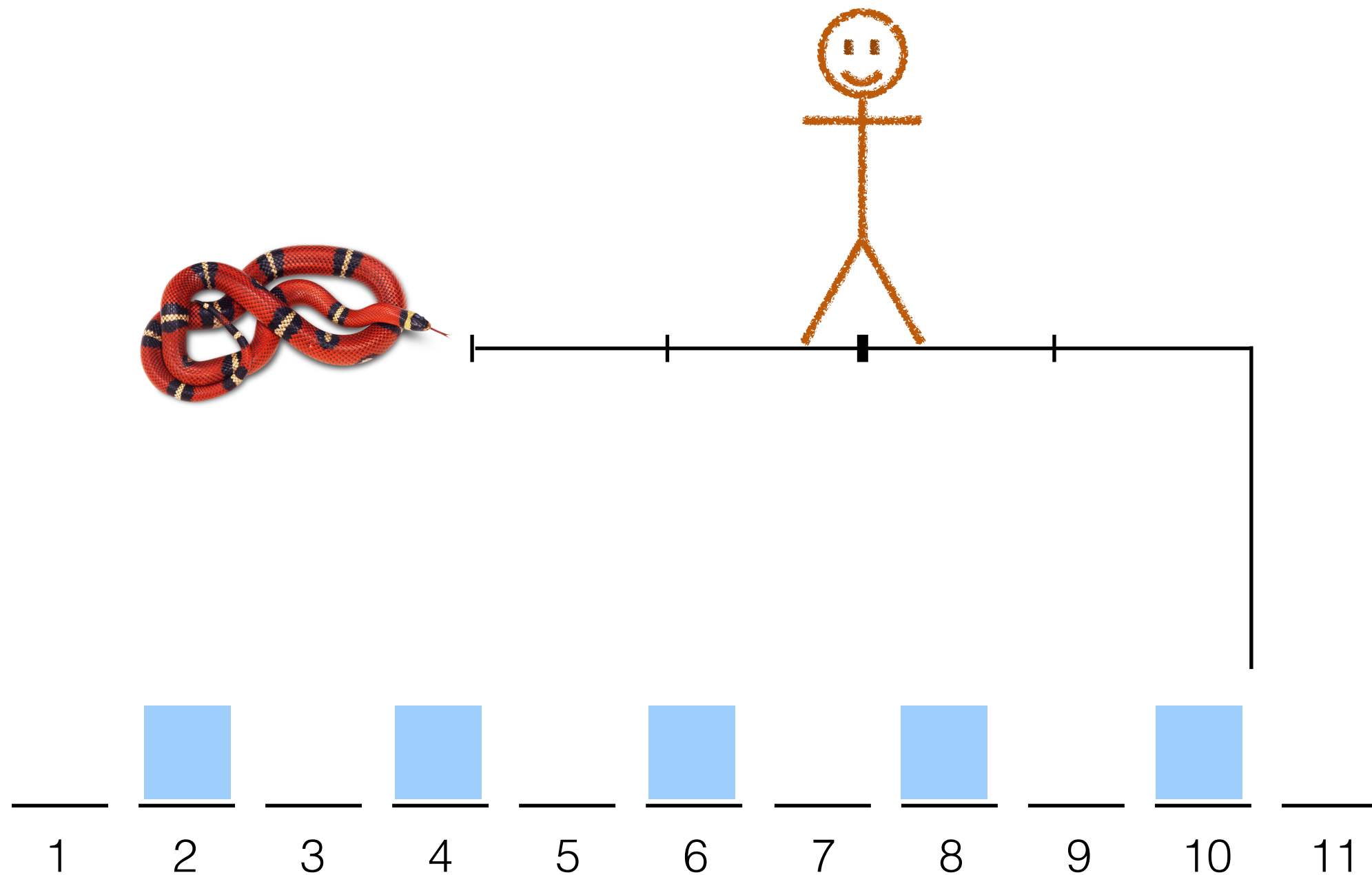
El juego del precipicio y la serpiente



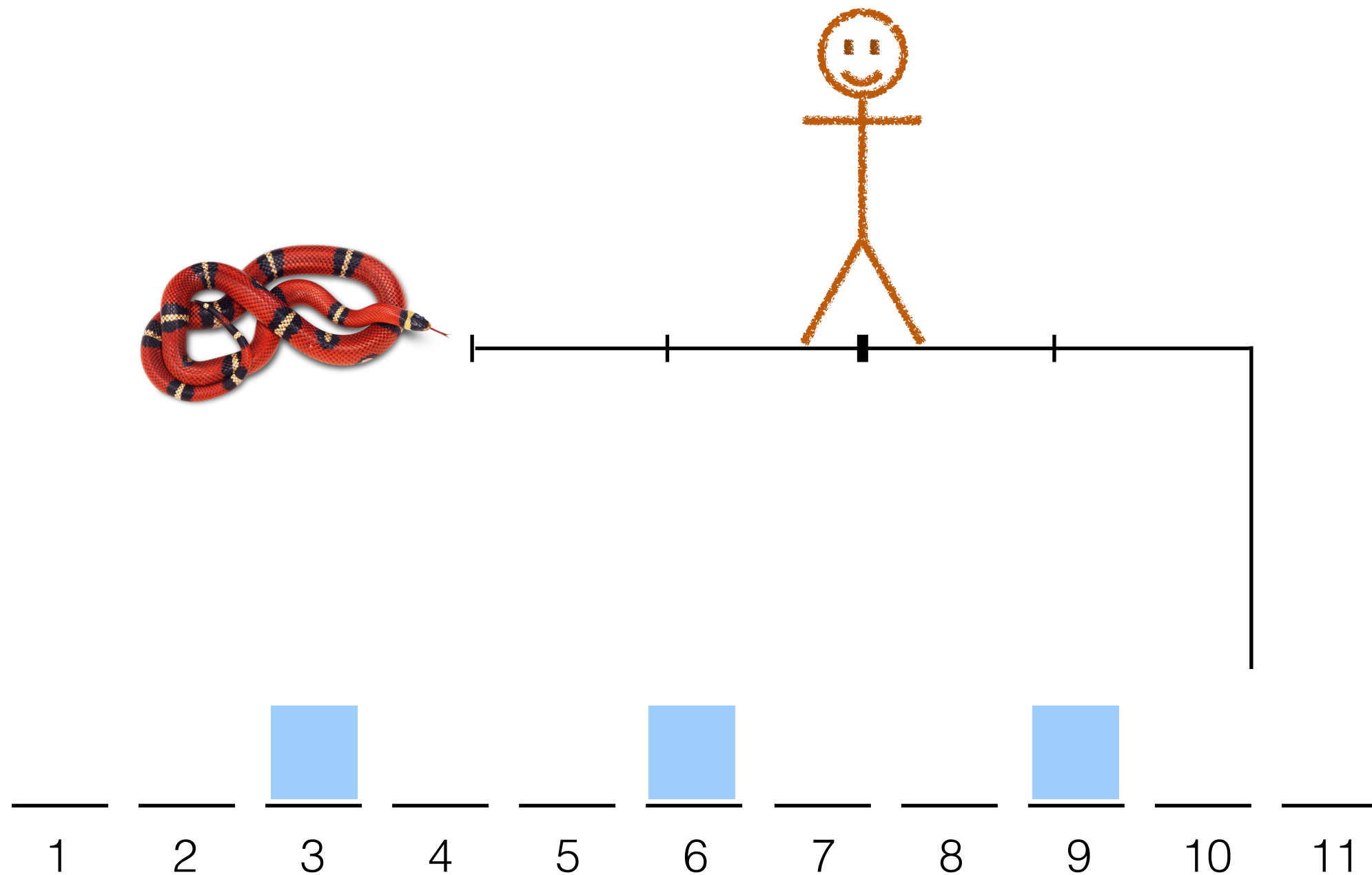
El juego del precipicio y la serpiente



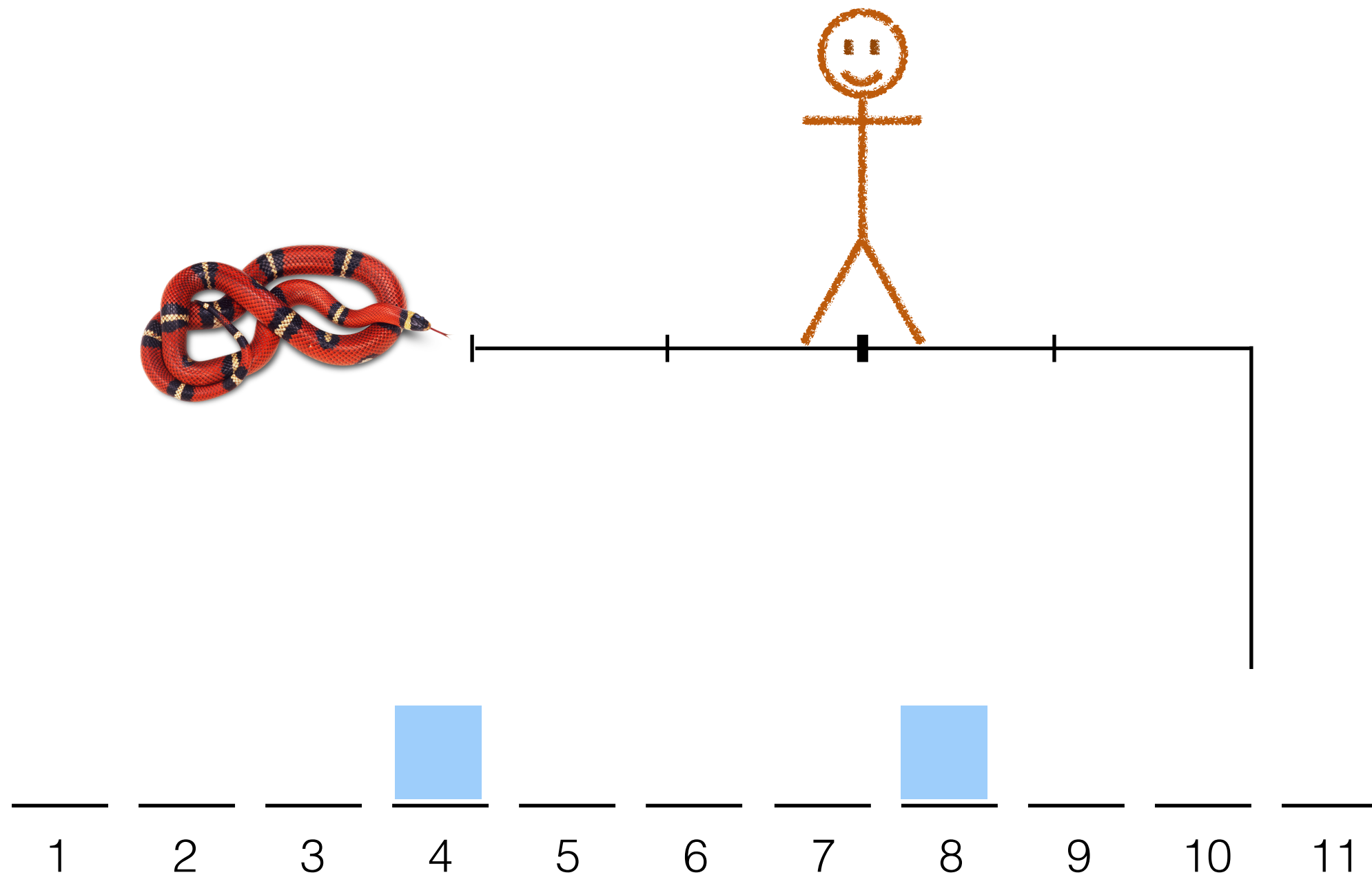
El juego del precipicio y la serpiente



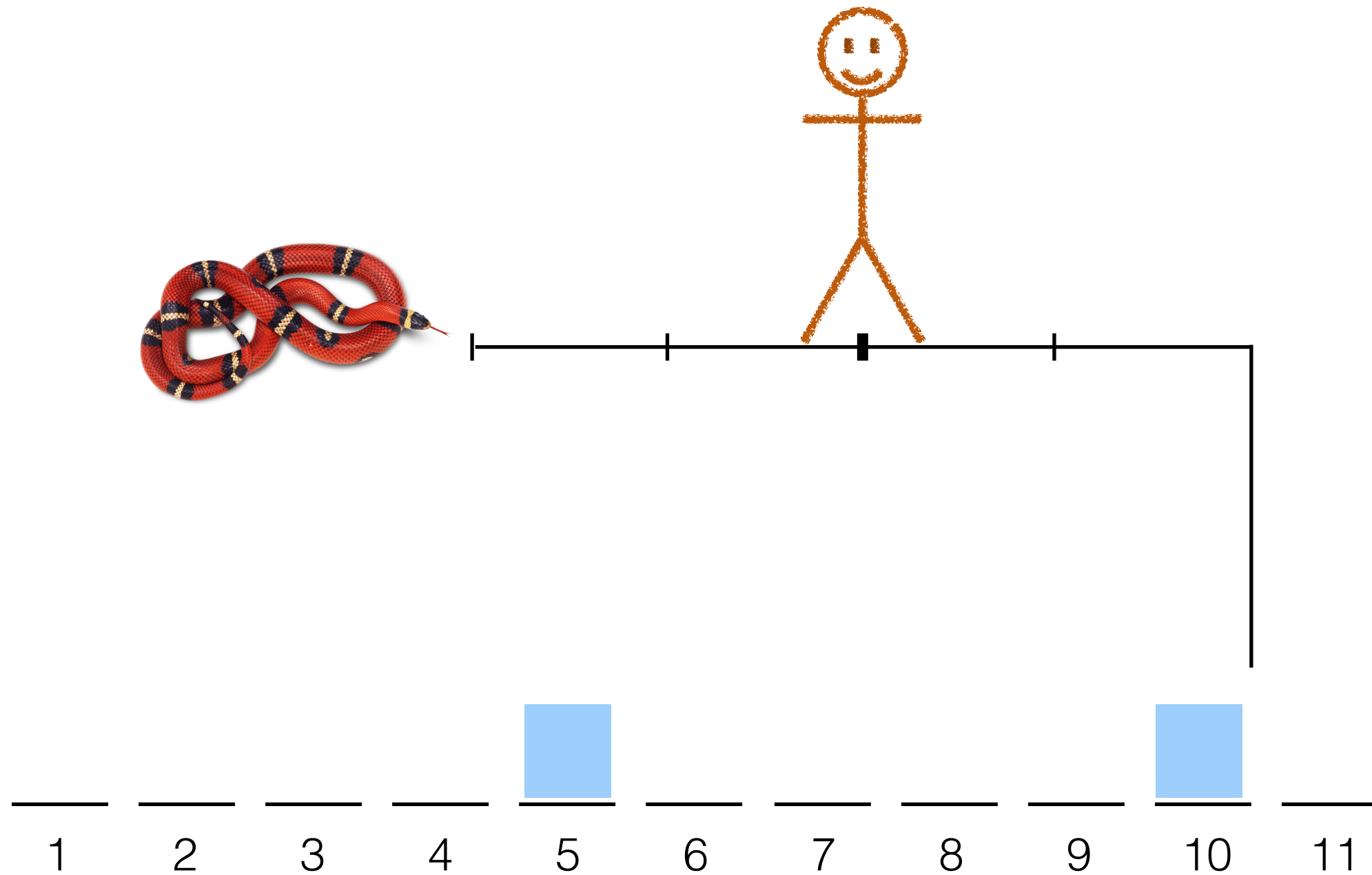
El juego del precipicio y la serpiente



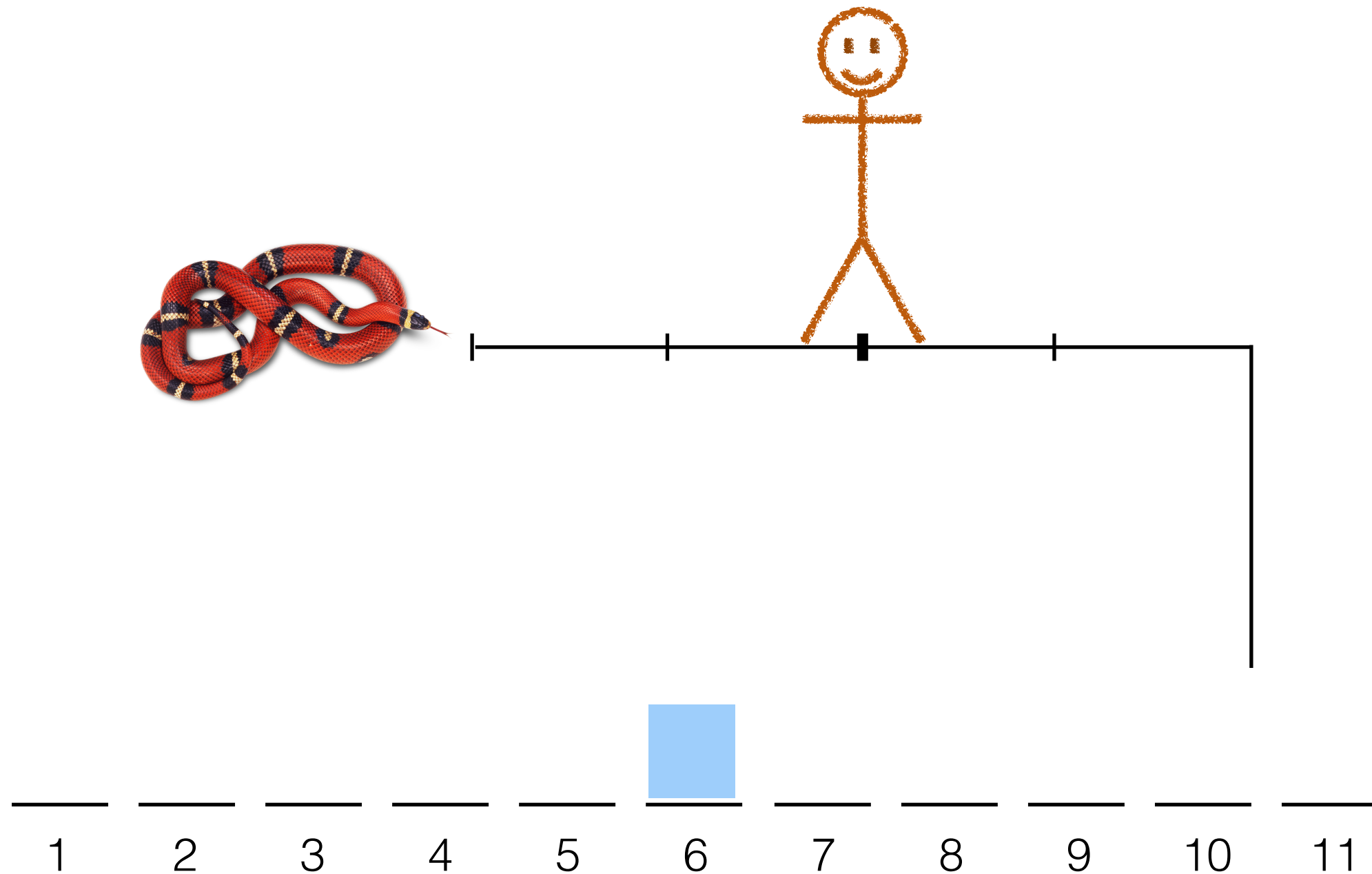
El juego del precipicio y la serpiente



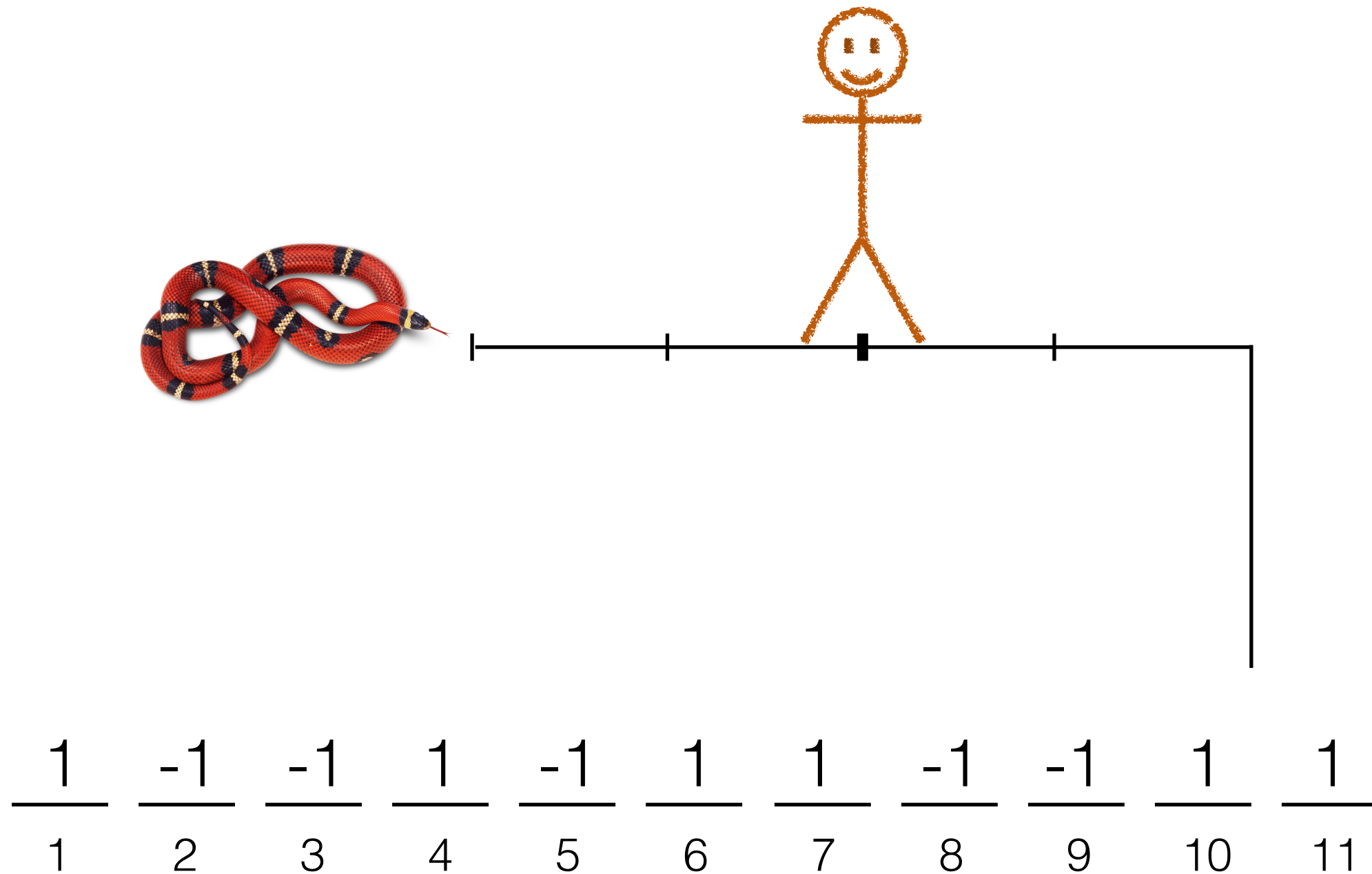
El juego del precipicio y la serpiente



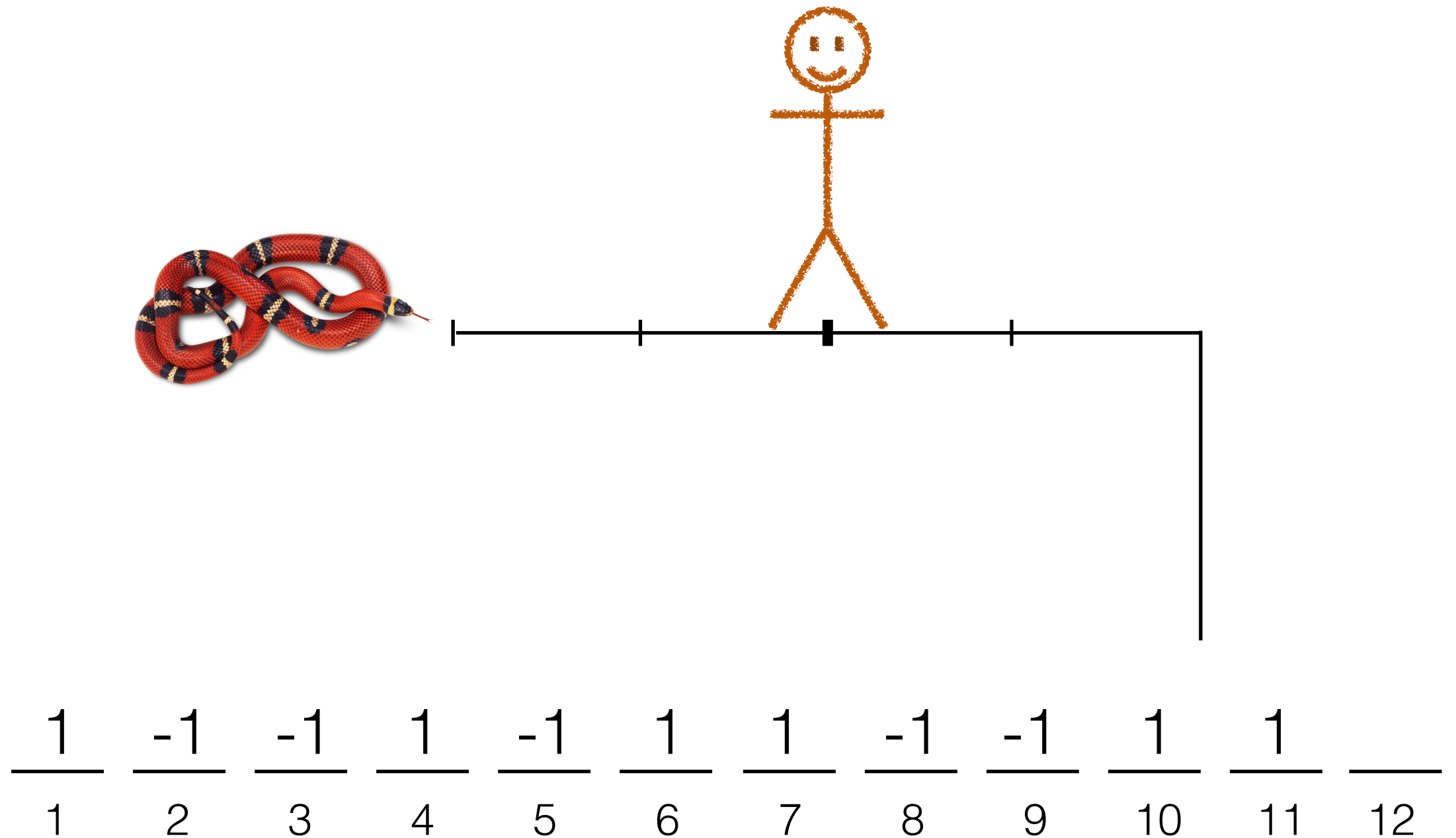
El juego del precipicio y la serpiente



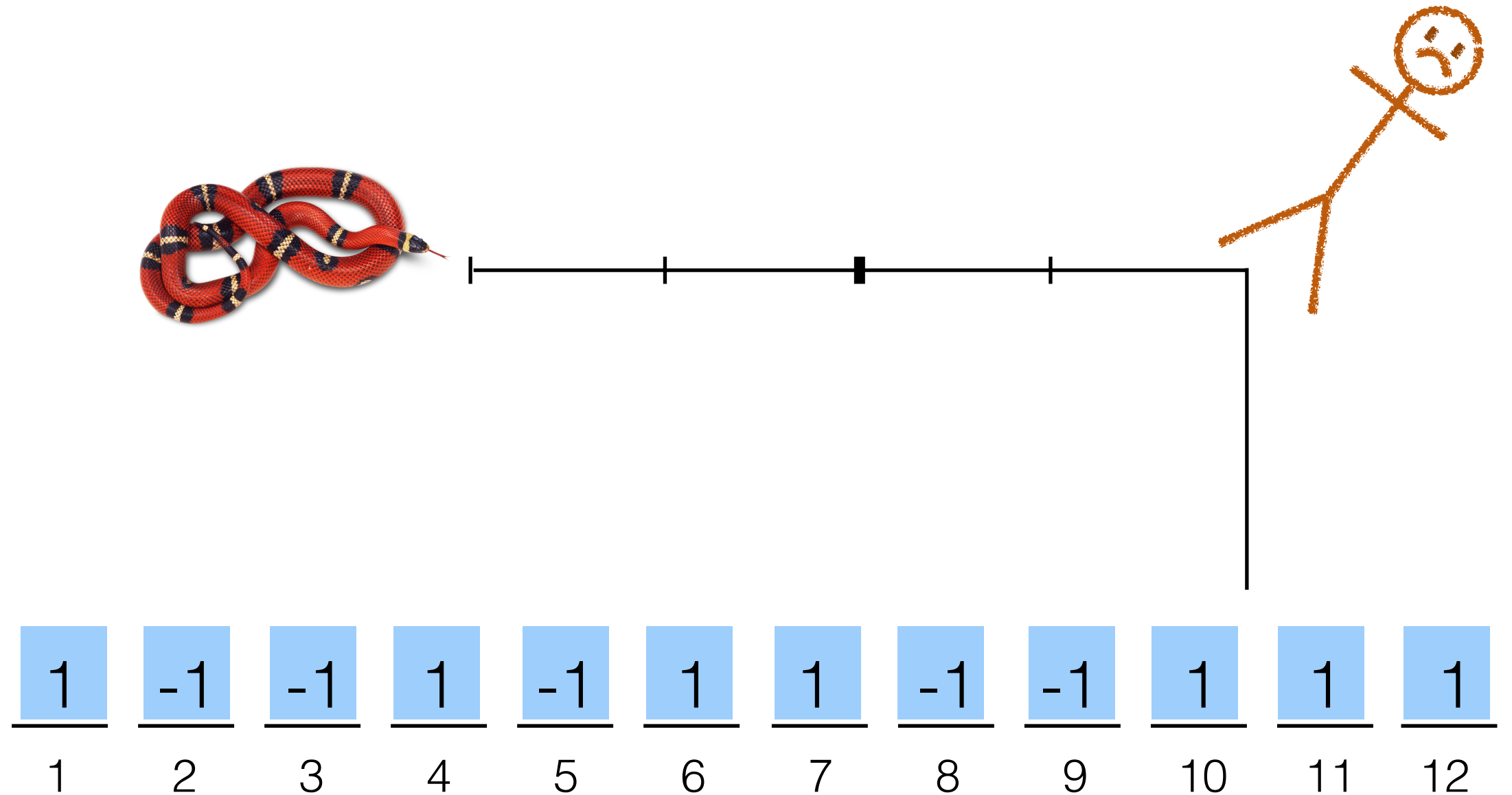
El juego del precipicio y la serpiente



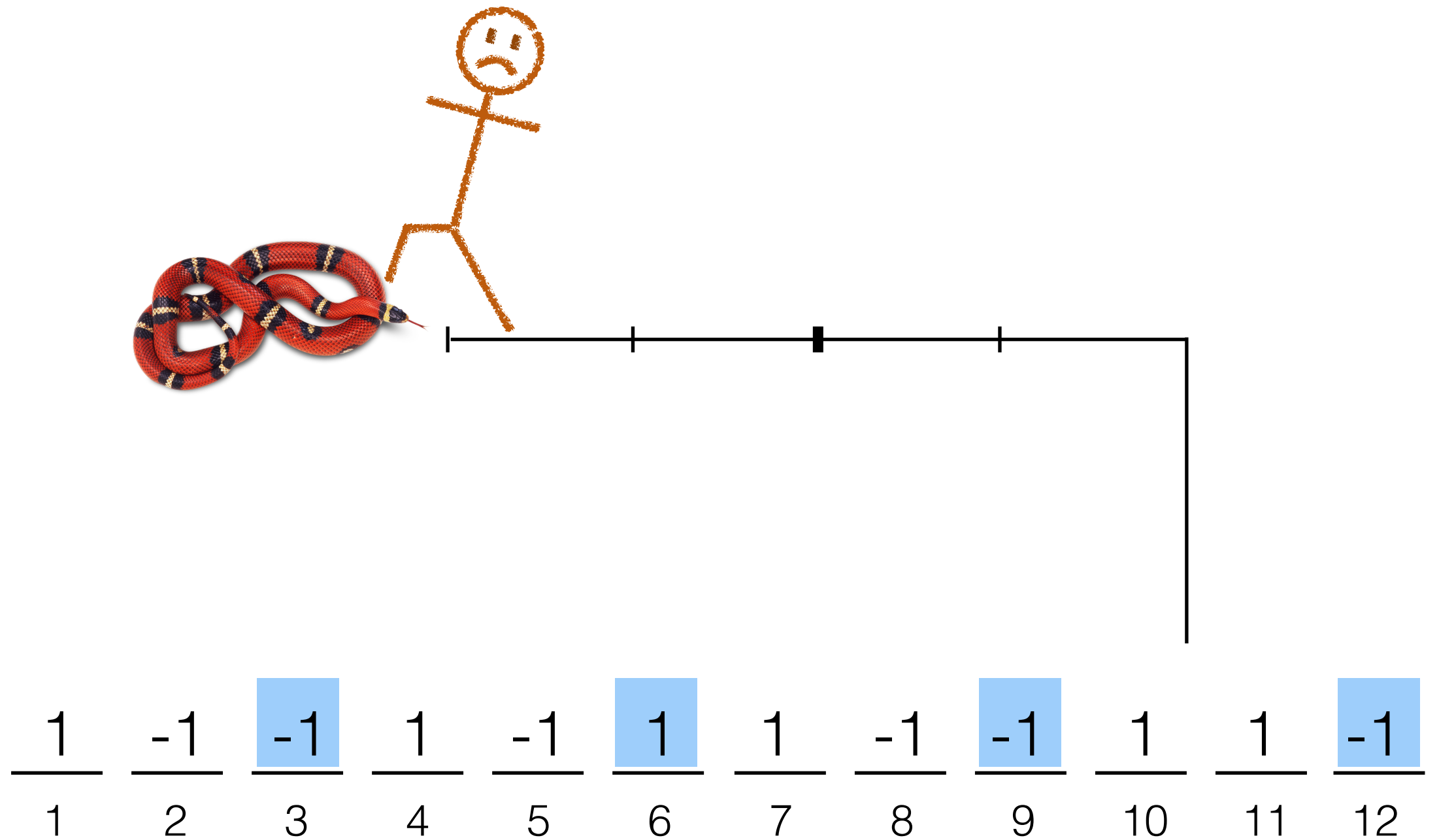
El juego del precipicio y la serpiente



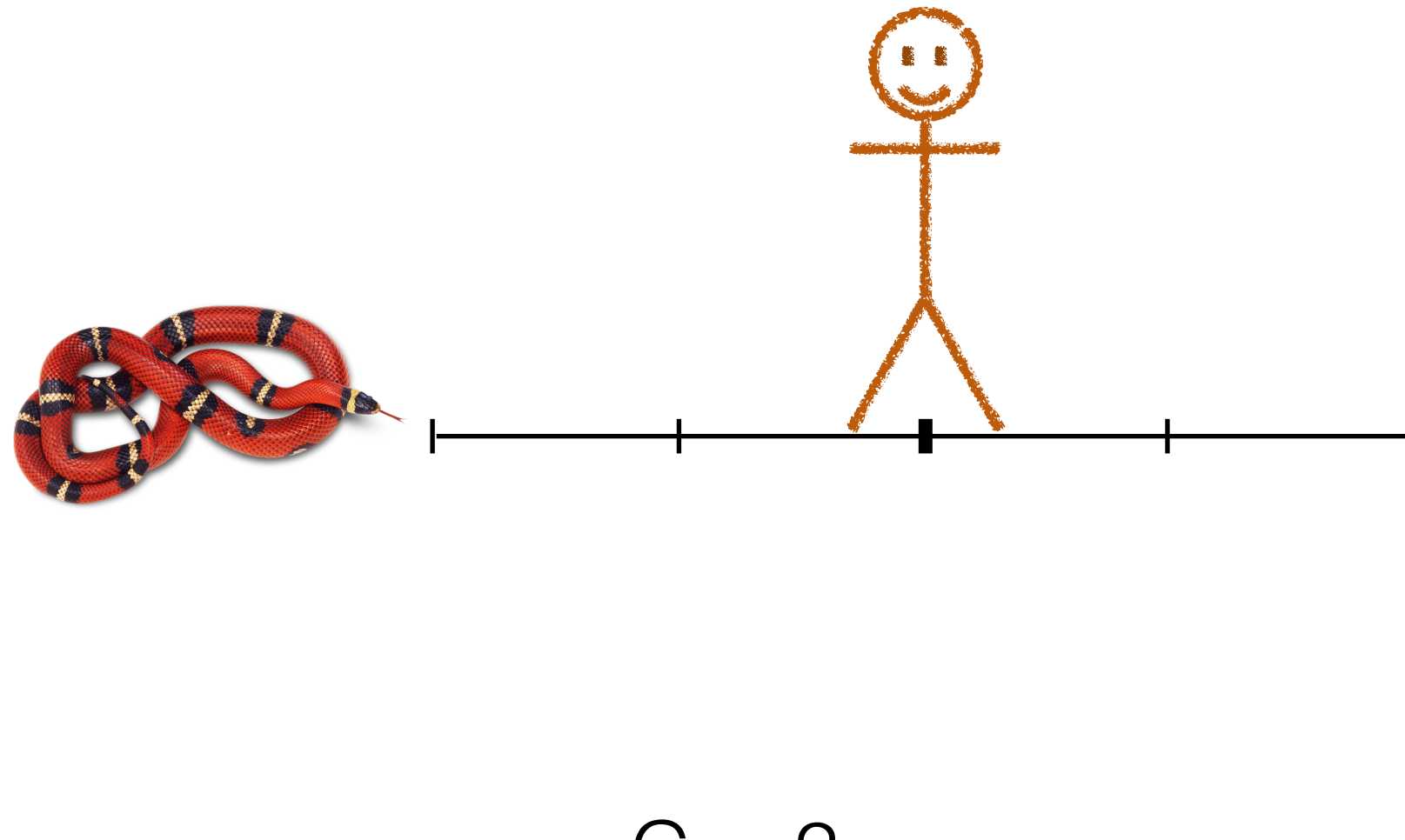
El juego del precipicio y la serpiente



El juego del precipicio y la serpiente

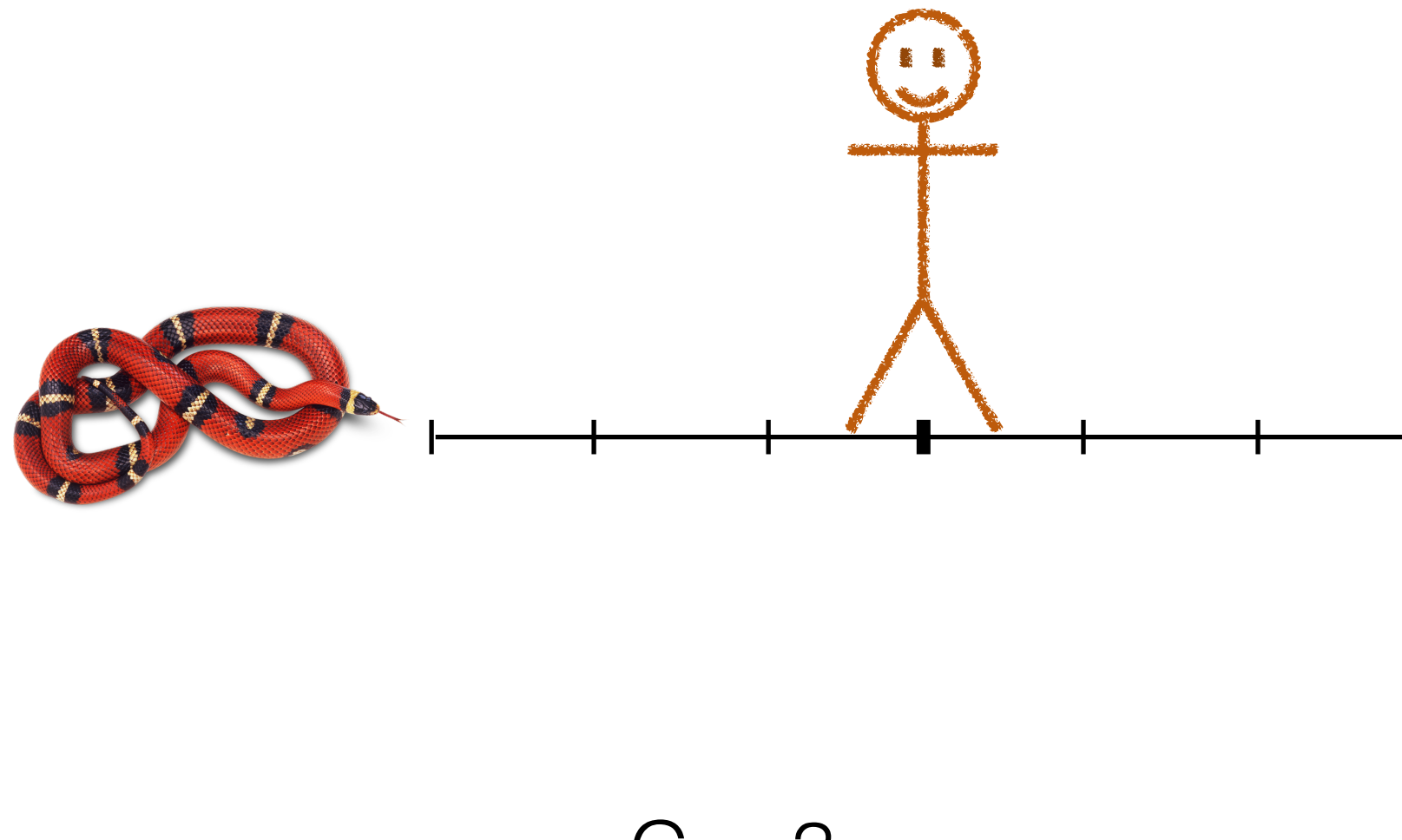


El juego del precipicio y la serpiente



$$C = 2$$

El juego del precipicio y la serpiente



$$C = 3$$

El Problema de la discrepancia de Erdős (~1932)

Para toda secuencia infinita $(x_n)_{n \geq 1} \in \{-1, 1\}$
y todo entero C , existen enteros k y d tal que

$$\left| \sum_{i=1}^k x_{id} \right| > C.$$

“La secuencia tiene discrepancia no acotada.”

- Octubre de 2010: se inicia el proyecto **Polymath5** con la intención de resolver el problema.

- **Octubre de 2010:** se inicia el proyecto **Polymath5** con la intención de resolver el problema.

Lifestyle › Tech › News

Computer cracks Erdős puzzle – but no human brain can check the answer

Jonathan Owen | Tuesday 18 February 2014 |  0 comments

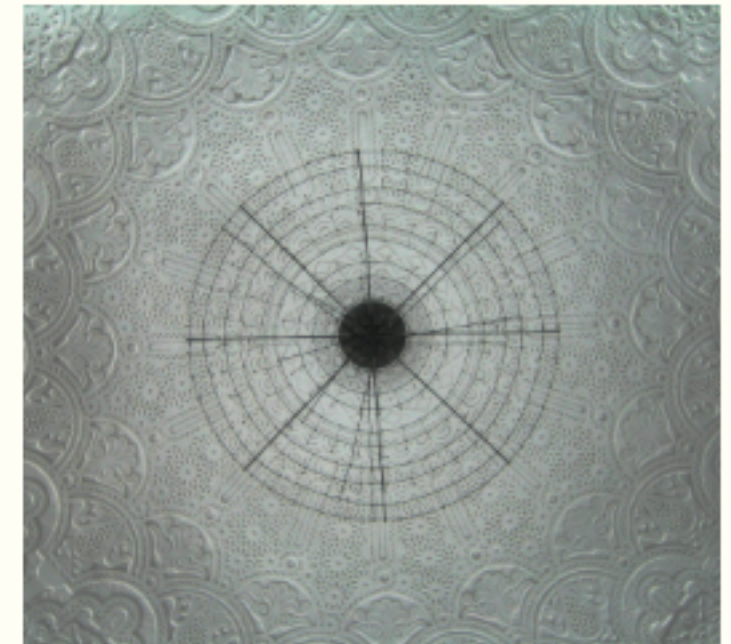


- Octubre de 2010: se inicia el proyecto **Polymath5** con la intención de resolver el problema.
- Febrero de 2014: A. Litsa y B. Koev demuestran la conjetura para $C = 3$.

- **Octubre de 2010:** se inicia el proyecto **Polymath5** con la intención de resolver el problema.
- **Febrero de 2014:** A. Litsa y B. Koev demuestran la conjetura para $C = 3$.
- **En septiembre de 2015,** T. Tao anuncia la prueba de la conjetura.

Discrete Analysis

Number Theory



February 27, 2016

The Erdős discrepancy problem

Terence Tao

The well-known Erdős discrepancy problem, asked by Erdős in 1957, is solved.

¡GRACIAS!



Posgrado en Ciencias Matemáticas

UNAM Juriquilla

Contacto: ahansberg@im.unam.mx

<http://paginas.matem.unam.mx/juriquilla/index.php/posgrado>