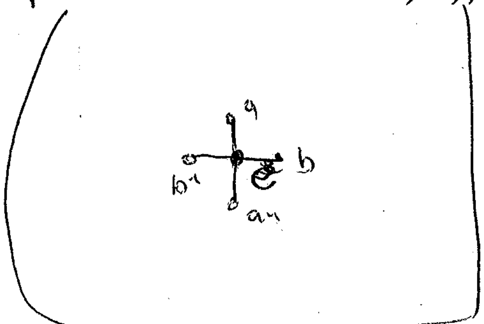
EMALCA.

I (1)

Grupos Libres / ~~Grupos como geometría~~

$F(a,b) =$ Conjunto de palabras en a, b, a^{-1}, b^{-1}, reglas de cancelación $aa^{-1} = e = a^{-1}a = b^{-1}b$. palabra vacía, „e".



Def. S conjunto. $\underline{S \cup \bar{S}}$ „alfabeto"

$(S\cup\bar S)^* = \{ w = (s_i)_{i=1}^n \}$. palabras

w es reducida si $s_{i+1} \neq s_i$ y $\overline{s_{j+1}} \neq s_j$

Def.

$F_{red}(S) = \{ (s_1, \dots s_n) \mid n \in \mathbb{N},\ s_1 s_2 \dots s_n$ reducida$\}$

Operación: $(s_1, \dots s_n)(s_{n+1}, \dots s_{n+m}) = (s_1, \dots s_{n-r}, s_{n+1+r}, \dots s_{n+m})$ $r =$ máximo $\{ k \in \{0, \dots, \min(\{n, \dots m-1\})\} \mid \forall j\ s_{n_j} = \overline{s_{n+1+j}}$ o $s_{n-j} = s_{n+1+j} \}$

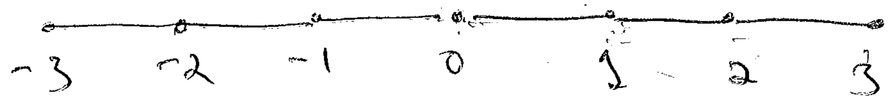
Def $F(S)$.

~~Consideradas~~ dado un grupo G y $S \subset G$ conj. S genera a G si el mínimo grupo que contiene a S es G.

ejemplo: „$\underline{S \text{ genera a } F(S)}$".

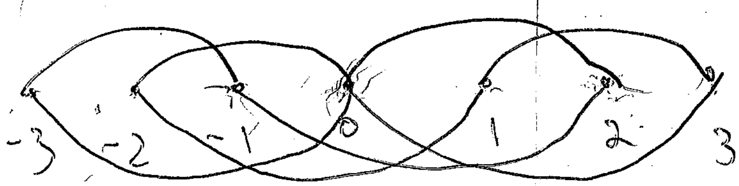
Def Sea G un grupo y sea S un conjunto de generadores. Consideremos. $\underline{Cay(G,S)}$ gráfico con vértices G, $(g_1, g_2) \in \mathcal{E}$ si existe $s \in S$ tal que $g_1 s = g_2$. es a.s.i.

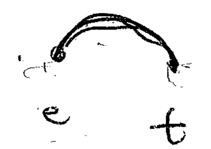
Ejemplos: a) $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$.



b) $\mathbb{Z} = \langle 2, 3 \rangle$ a. az

c) $\mathbb{Z}/2 = \langle t \mid t^2 \rangle$.



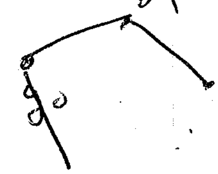


c) $F_2 = \langle a, b \rangle$.

Teorema. Sea F un grupo libremente generado en S. $Cay(F, S)$ no contiene ciclos.

① Como S genera, $Cay(F, S)$ es conexa.

② Sup. hay un ciclo $g_0, \dots g_n$ $g_0 = g_n$ y todos distintos



$s_1 = g_1 g_0^{-1}$

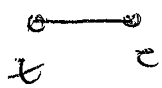
y $s_j = g_{j+1} g_j^{-1}$ $\forall j \geq 2$.

$w = s_n \cdot s_{n-1} \cdots s_1 = g_0 g_{n-1}^{-1} g_{n-1} g_{n-2}^{-1} \cdots$
palabra.

$g_0^{-1} = e$.

Como los vértices distintos, w palabra ~~no~~ reducida, que representa a e_F.

(8) Pregunta: G grupo tal que $\mathrm{Cay}(G,S)$ árbol $\Rightarrow G = F(S)$. NO!

$\mathbb{Z}/2$:  $\mathbb{Z}$, $S = \langle \pm 1 \rangle$.

Teo $\mathrm{Cay}(G,S)$ árbol $\Rightarrow G = F(S)$.

→ Gráfico sin ciclos. $st \neq e \quad \forall s,t \in S$.
(Ejercicio!)

Def. Sea G un grupo. S un conjunto. Una presentación para G es un conj. R de palabras tal que

$$F(S)/\langle R\rangle \cong G.$$

$R \to$ subgrupo normal generado por R.

Ej. $F(S)/\langle\phi\rangle = F_2$, $\mathbb{Z}/2 = \langle t \mid t^2\rangle$.

$D_\infty = \langle a,b \mid a^2, b^2\rangle$, $\mathbb{Z}^2 = \langle a,b \mid aba^{-1}b\rangle$.

[Comercial: Posgrado Conjunto]

Otro lugar de donde viene geom. y dinámica de los grupos:

Def Sea G un grupo. X un conjunto.

$(\mathrm{biy}(X) = \{ f: X \to X \mid f \text{ biyectiva} \})$

una acción es $\mu: G \times X \to X$
$g, x \mapsto g \cdot x$

tal que
0) $e \cdot x = x$
2) $g_1(g_2 x) = (g_1 \cdot g_2) \cdot x$.

¿Cómo reconocer a un grupo libre?
→ Su gráfico de Cayley. Otra: acciones

Lema (F. Klein). (Ping-Pong).
Sea G un grupo $\underline{G = \langle a, b \rangle}$. $\underline{X}$ un conjunto con una acción de G tal que
1) existen $A, B \subset X$. $B \not\subset A$.

2) $a^n B \subset A$, $b^n A \subset B$.
ent. $G \cong F\langle a, b\rangle$.

Dem: $\underline{\text{Fred}(a,b)} \twoheadrightarrow \underline{G}$ supreyectiva (identidad en generadores).
Sup. no es inyectiva. ent. existe w palabra reducida $\varphi(\underline{w}) = \underline{e}$. hay 4 casos:
① $w = \underline{a}^{n_0} \cdot b^{m_1} \cdots b^{m_k} a^{n_k}$
(empieza con a^*, alternadamente b^* y termina a^*.)

$B = e \cdot B = w \cdot B = a^{n_0} b^{m_1} \cdots b^{m_k} a^{n_k} B$.

$\subset a^{n_0} b^{m_1} \cdots b^{m_k} A$

$\subset a^{n_0} b^{m_1} \cdots B$

$(\ldots) \subset \underline{a}^{n_0} B \subset A$

$\Rightarrow B \subset A$ ⨳.

② w empieza y termina con b.
$w' = a w a^{-1}$ cumple 1 y no trivial.
③ $w = a^n w' b^m$. Sea $r \in \mathbb{Z} \setminus \{0, -n\}$,
$a^r w a^{-r}$ empieza y termina con a.

(4) w empieza con b y termina con a.
$\Rightarrow w^{-1}$ cumple 3.
$\Rightarrow$ $\mathrm{Free}(S) \to G$ inyectiva.

<u>Generalización</u>: $G = \langle S \rangle$ un grupo. $G \curvearrowright X$ conjunto. $\mathcal{X} \subset P(X)$ una colección de conjuntos $\mathcal{X} = \{ X_g \mid g \in S \cup S^{-1} \}$.

$p \in X \setminus \bigcup_{g \in S \cup S^{-1}} X_g$

con 1) $gp \in X_g$ 2) $g(X_h) \subset X_g$ $\forall\, h \in S \cup S^{-1} \setminus g^{-1}$. $\Rightarrow G = F(S)$.

Ejemplo: (Schottky, Klein).
$F_g \leq PSL_2(\mathbb{R})$ tal que existen $2g$-curvas cerradas simples en $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.
A_g lleva el int. en el exterior, B_g al reg

 $\Rightarrow$ $F_2 = \langle A_1, \dots A_g, B_1, \dots B_g \rangle$ es libre de rango $2g$.

<u>Volviendo a la geometría</u>.
$\mathrm{Cay}(G,S)$ - ejemplos 1) $\mathbb{Z}/2$, 2) F_2, 3) $\mathbb{Z}$

3) $\mathbb{Z}^2$, $\emptyset$ 4) $H_{\mathbb{Z}} = \langle x, y, z \mid [x,y], [y,z], [x,y] \cdot z^{-1} \rangle$ es isomorfo a $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, x,y,z \in \mathbb{Z} \right\}$

PREGUNTAS / EJERC.

5) $= SL_2(\mathbb{Z}) = \{ A \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z}) \mid A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad ad - bc = 1 \}$

$PSL_2(\mathbb{Z}) = SL_2(\mathbb{Z}) / \pm id.$ $\quad /_{\pm 1}$

→ Probar $PSL_2(\mathbb{Z}) = \langle S, T \mid S^2, (ST)^3 \rangle$
generado por $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T = ab$

→ Pregunta Capciosa: K_5 gráfica completa en 5 vértices ¿Es $Cay_S(G)$ para algún S y G?

→ Gráfico de Cayley de $PSL_2(\mathbb{Z})$. como árbol

$I - G$

→ Nociones de Acciones.

$G \curvearrowright X$ (espacio métrico / topológico).

G es a) libre si $gx = x$ $\forall x$ ⇒ $g = e$

b) Propia, prop. disc^{te} si $\forall\ x \in X$, existe una vecindad U tal que

$S_U = \{ g \mid gU \cap U \neq \phi \}$ es finito.

Ejemplos: a) $G \curvearrowright Cay_S(G)$. libremente. transitivamente

b) $\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R}$ por traslación. libre.

c) $\mathbb{Z} \curvearrowright S^1$ $\quad k \mapsto (e^{2\pi i \sqrt{2}})^k$

acción libre, no propia

Conclusión: $G = \langle S \rangle$ es libre ⇔ $Cay_S(G)$ árbol
$st \neq e$ ∀ $s, t \in S$ ⇔ actúa en un árbol libremente.
actúa en conj. con sit. de ping-pong.

Milnor-Schwarz. EMALCA

0. Gráficas de Cayley de siempre.

Definición. Un espacio métrico es X, $d: X \times X \to \mathbb{R}$

tal que 1) $d(x,y) = d(y,x)$ 2) $d(x,y) = 0 \iff x = y$.

3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Ejemplos: a) $\mathbb{R}^2$, métrica del teo. de pitágoras.

b) $Cay_S(G)$, c) $l^2([0,1])$. d)

X - propio si comp. $B_r(x)$

Def G grupo. X esp. ~~métrico~~ conj. G actúa en X

si hay $G \times X \to X$ $(g,x) \mapsto gx$ tal que

1) $(e,x) = x$, 2) $(g_1, g_2 x) = (g_1 g_2) \cdot x$.

Ejemplo: 1) $\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R}$ por traslación, 2) $\mathbb{Z}^2 \curvearrowright \mathbb{R}^2$ también. 3) $\mathbb{Z} \times S^1$ $(n, \xi) \mapsto e^{(2\pi i \sqrt{2})n} \cdot \xi$.

$G \curvearrowright X$. Una acción es libre si

$gx = x \ \forall x \Rightarrow x = e$.

Def Sea X espacio métrico. La acción es propia

si $\forall x \in X$, existe $R_x > 0$ tal que

$x \in B_{R_x}(x)$. y $\{g \mid gB_{R_x} \cap B_{r_x}\}$ es

finito.

libres: 1) y 2, 3).

Propias: 1 y 2, 3 no: dado $1 \in S^1$, construir una int. de Radios $\to 0$ y elementos ahí!

Noción de Cuasi isometría.

(X, d_X), (Y, d_Y) espacios métricos. Una isometría es

$f : X \to Y$ tal que $d_X(x_1, x_2) = d_Y(f(x_1), f(x_2))$

f es encaje a-bilipschitz si $\frac{1}{a} d_Y(f x_1, f x_2) \leq d(x_1, x_2) \leq a\, d(f(x_1), f(x_2))$

f es encaje Cuasi isométrico (a, c) si $-c + \frac{1}{a} d_Y(f x_1, f(x_2)) \leq d_X(x_1, x_2) \leq a\, d_Y(x_1, x_2) + c$

~~Ejemplos~~ $f : X \to Y$ es cuasi isometría si es un encaje cuasi isométrico y $\exists\ g : Y \to X$, $M > 0$ tal que $d(f \circ g(y), y) < M$, $d(g \circ f(x), x) < M$.

Ejemplos

$2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$. encajes isométricos

$-4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$

Cuasi inversos: $\mathbb{R} \to \mathbb{Z}$

$t \mapsto \lfloor t \rfloor$ = mayor entero menor o igual que t.

$\mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$ $\quad n \mapsto \begin{cases} n & \text{si } n \text{ es par} \\ n+1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$

3. II

2) $v, b \in \mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2$.

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto tv + b.$$ encaje ~~cuasi~~ isométrico

3) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $t \mapsto t^2$ no es encaje:

$$d(t_0^2, t_1^2) = t_0^2 - t_1^2 \nleq C|t_1 - t_2| + K.$$

si $t_0, t_1 \gg 1$.

4) $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ $t \mapsto t\, e^{i\pi \ln(t)}$

espiral que nunca se cierra.

$$d(t_0 e^{i\pi \ln(t_0)}, t_1 e^{i\pi \ln t_1})$$
$$\|$$
$$|t_0 e^{i\pi \ln(t_0)} - t_1 e^{i\pi \ln(t_1)}|$$
$$\leq |t_0 - t_1|\, |e^{i\pi \ln|t_0 - \ln t_1}| \leq |t_0 - t_1| \frac{Z}{1}$$

por abajo: $\frac{1}{\sqrt{2}}$ sirve de cota.

Pregunta: ¿Cuasi isometría? — NO!

Reflexiones - QI - no inyectivas, no suprayectivas, no continuas., En gral, no hay isom. a dist. finita de QI

$\mathrm{Cay}_S(G)$

X de diámetro finito, Q.I. a $\{pt\}$.

GEODESICA = encaje ~~Q~~ Isom. de $I \to X$. $\sigma(0) = x$, $\sigma(1) = y$.

CUASI - encaje Q. Isom de $I \to X$.

Milnor - Schwarz. ~~X geod. si~~ (4) II

X espacio métrico. X es propio si $B_r(x)$ - compacto
Geodísico: dados x, y $\exists$ geod. $x \to y$. (c,b) - cuasi geodísico
Sup. $G \curvearrowright X$ tal que $G \backslash X$ es compacto.
y la acción es propia $\Rightarrow$

$\exists$ $S \subset G$ conj. finito de generadores.
tal que $G = \langle S \rangle$ y $\forall x \in X$ $\begin{array}{l} G \to X \\ g \mapsto gx \end{array}$

es cuasi isometría.

Lema Sea G grupo. $G \curvearrowright (X, d)$ por isometrías
Sup. $\exists$ (c, b) tales que X es (c, b) - Q. geodísico, Sup. existe $B \subset X$ tal que
A) diam $B < \infty$,
B) $\bigcup_{g \in G} gB \supseteq X$ C) $\{ g \in G \mid gB' \cap B' \}$ finito con $B' = \{ x \in X \mid d(x, B) \leq 2b \}$
ent. A) $G = \langle S \rangle$. y $\begin{array}{l} G \to X \\ x \mapsto gx \end{array}$ es una cuasi isom.

TEO. MILNOR - SCHWARZ
$G \curvearrowright X$ esp. geodésico propio. Acción propia,
$G \backslash X$ compacto. Entonces G - f. gen y
G Q.I. a X.

Consecuencias

1) $H < G$ $[G:H] < \infty$, G finitamente generado

$\Rightarrow$ H finitamente generado. Prueba: Acción.

2) $\mathbb{R} \sim \mathbb{Z}$, T^2 Q-I a $\mathbb{Z}^2$, Nil_3 Q-I a $H_{\mathbb{Z}}$.

Probar: A) $\mathbb{R}^2$ no es Q-I a $\mathbb{R}$.

B) Una Cuasiisom. es un encaje Q-I con Imagen Cuasidensa ($\exists C > 0$ $\forall y, \exists x, d(y, f(x)) < C$).

(

d) $F_2 < Sl_2(\mathbb{Z})$ de índice finito. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

C) F_k y F_l - $k \neq l$. ¿Son cuasiisométricos?

Sugerencia: $t_n = F_2 \to \mathbb{Z}/n$ $\begin{smallmatrix} a \to gen \\ b \to 1, 2 \end{smallmatrix}$. $[F_2, \ker t_n] = n \Longrightarrow [\ker t_n : F_2]$

$[F_2 : H] = rk(H) - 1$ / $rk(F_2) - 1$ $\Big\{$ $\overset{\shortparallel}{n+1}$ $rk(H) = 1 + (n+1) = n+2$

¿Qué estudiar con Q-I? (Rigidez Cuasiisométrica). Sea P una propiedad de Grupos. P es "Geométrica" si H tiene p y $\varphi: G \to H$ Q-I $\Leftrightarrow$ G tiene a P.

P es Rígida si G tiene P y H Cuasiisom a G $\Rightarrow$ H tiene K de índice finito que tiene P.

Ejemplos. 0. Ser finito. 2. Q-I a $\mathbb{Z}$.

3. Virtualmente $\mathbb{Z}^n$

Familias geométricas: $\pi_1(S_g) = \langle a_1, a_2, \ldots a_g, b_1, \ldots b_g \mid \prod [a_i, b_i] \rangle$. (Q.I. - Hamenstädt).

(Bonita Consecuencia de Geom. de Thurston).

Cosas no Rígidas:

A) Ser simple

B) Que actúen en $\mathbb{H}^3$ con cociente compacto. → Perelman!

PREGUNTAS: Grupos Policíclicos, RAAGS.

RAAGS ↓ grupos con pres. específica.

Policíclicos: (~~Extensión~~ Serie Subnormal

$G_0 = G \geq G_1 \geq \dots \geq G_n$.

tal que G_{i+1} normal en G_i,

G_i / G_{i+1} - Cíclico.

$\underline{\mathbb{Z}^2 \rtimes_A \mathbb{Z}}$ — para $A \in Sl_2(\mathbb{Z})$, diagonalizable$/\mathbb{R}$; $A^2 \neq 1$.

(λ, λ^{-1} val. propios.

$$1 \to \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2 \rtimes_A \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to 1.$$

Vive en el gpo de Lie:

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \rtimes_D \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \to 1$$

$D(t): \mathbb{R} \to Sl_2(\mathbb{R}) \qquad t \longmapsto \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$.

$\mathbb{R}^2 \rtimes_D \mathbb{R} =$ "Sol_3"!

G_A actúa en $Sol_3 \Rightarrow T^2 \to Sol_3 / G_A \to S^1$

(haz de toros $/ S^1$.)

G_A Q.I. A $\underline{Sol_3}$ $\forall A$,

$\underline{\underline{NO}}$ Debilmente conmensurables G_A y G_B si A^n no conj. a B^n.

Grupos Hiperbólicos

Def. Sea X espacio métrico. X es δ-hiperbólico ($\delta > 0$) si ~~para~~ triángulo geodésico (e.g.) $[\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2]$

$\gamma_i : [0, L_i] \to X$, $\gamma_0(L_0) = \gamma_1(L_1)$, $\gamma_1(L_1) = \gamma_2(0)$

$\gamma_1(L_2) = \gamma_0(0)$,

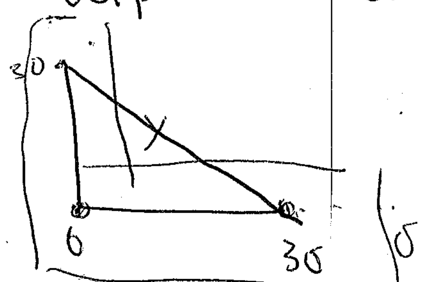
– Un triángulo geodésico es δ-delgado.

Si
$$\operatorname{im}\gamma_0 \subset B_\delta(\operatorname{im}\gamma_1 \cup \operatorname{im}\gamma_2)$$
$$\operatorname{im}\gamma_1 \subset B_\delta(\operatorname{im}\gamma_2 \cup \operatorname{im}\gamma_0).$$
$$\operatorname{im}\gamma_2 \subset B_\delta(\operatorname{im}\gamma_1 \cup \operatorname{im}\gamma_0)$$

Def. Sea $\delta > 0$, X es δ-hiperbólico si es geodésico y cada triángulo es δ-delgado

Ej. 0) X acotado, $d(x,y) < M > 0$, X es M-hiperbólico

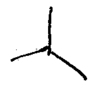
1) $\mathbb{R}^2$ No es hiperbólico: $\delta > 0$,



2) $\mathbb{H}^2$ - espacio hiperbólico de dim 2, $\delta = \log(\sqrt{2} + 1)$. Más generalmente, M var. riemanniana sec $M \leq -1$, $\tilde{M} \cong \mathbb{H}^n$

M - δ-hiperbólico III. 2.

4) Árboles métricos son hiperbólico.



10) NEC.

5) F_2, 6) ¿ES $\mathbb{Z}^2$ hiperbólico?

$\pi_1(S_g)$

7) $\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathbb{Z}$, 8) $H_{\mathbb{Z}} \to$?, 9) $\pi_1(S_2)$ —

Def 1 Una (c,b)-cuasi geod. es un encaje (c,b)-o cuasi isom.

Δ cuasi geod $\to$ Δ de cuasigeodésicas.

Def Un espacio métrico es (c,b,δ)-cuasi hiperbólico si X es (c,b)-Q. geodésico

$\mathrm{Cay}(G)$

Lema A) Y cuasi geod $f: X \to Y$ encaje Q.I.

$\Rightarrow$ X es cuasi geod.

B) Y cuasi hiperbólico, $f: X \to Y$ encaje Q.I.

$\Rightarrow$ X es cuasi ~~geod~~. cuasi hip.

(Cor. $f: X \to Y$ Q.I, ent. X δ hip $\Leftrightarrow$ Y lo es.

Cuasigeodésicas en espacios hiperbólicos.

Lema Sean $\delta, c, b > 0$, X un espacio δ-hiperbólico. Entonces existe $\Delta > 0$ tal que

$\gamma: [0,L] \to X$ (c,b)-cuasigeodésica.

y $\gamma' : [0, L'] \to X$ una geodésica con $\gamma'(0) = \gamma(0)$, $\gamma'(L') = \gamma(L)$, entonces. $\operatorname{Im} \gamma' \subset B_\Delta(\operatorname{im} \gamma)$,

$\operatorname{im} \gamma' \subset B_\Delta(\operatorname{im} \gamma')$.

Advertencia: No ocurre en espacios no hiperbólicos
$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ $t \mapsto e^{i \ln(t)}$ encaje Q.I. no unif. cerca de ninguna cuasigeodésica. (Ejercicio!)

Para Qué sirve ésto?

Sol. del problema de la palabra.

$G = \langle S | R \rangle$ presentación finita. El problema de la palabra para G es soluble si existe un algoritmo que decide para $w \in (S \cup \bar{S})^*$ si w representa a e. (Precisamente: $\{w \in (S \cup \bar{S})^* \mid w =_G e\}$ son rec. en.)

Teo Grupos hiperbólicos tienen problema de la palabra soluble.

Prueba: Dos pasos:

I) Def $\langle S, R \rangle$ es una presentación de Dehn si existen $n \in \mathbb{N}$, $u_1, \dots u_n$, $v_1, \dots v_n$ palabras en S, tal que

1) $R = \{u_1 v_1^{-1}, \dots, u_n v_n^{-1}\}$.

2) $\operatorname{long}_S(v_i) < \operatorname{long}_S(u_i)$.

3) $\forall w \in (S \cup \bar{S})^*$ que representa $e \in \langle S, R \rangle$

existe j tal que u_j es subpalabra de w.

Ejemplo $F_2 = \langle a, b \mid aa^{-1}(\varepsilon), bb^{-1}(\varepsilon), a^{-1}a(\varepsilon), b$

es de Dehn.

$\langle x, y \mid xyx^{-1}y^{-1} \rangle$ no es de Dehn.

Prop. I Si $\langle S, R \rangle$ es de Dehn, ent. el problema de la palabra es soluble.

$$w \in (S \cup S^{-1})^* \longrightarrow w = e \Rightarrow \text{se acabó.}$$

$\downarrow$ I ∤ a) Si ninguna u_i es subpalabra ent $w \neq e$.

$w \neq e$.

b) Si alguna u_j es subpalabra.
$w = w' u_j w''' = w' v_j w''$.

v_j es más corta y $w' v_j w''$ lo es tamb

$\Rightarrow$ inductivamente.

Prop II. Sea G fin. gen, δ-hip $\gamma : [0, n] \to \mathrm{Cay}(G)$ realización de un ciclo. ent $\exists\ t, t' \in [0, n]$.

tal que $\ell(\gamma|_{[t,t']}) \leq 8\delta$ y

$\gamma|_{[t,t']}$ no es geodésica.

Prop III. G hip $\Rightarrow$ tiene presentación de Dehn.

III.5

Usando Prop II: probamos el teo. $F(S) \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} G$

G hip, ent. $\exists\ \delta > 0$ tal que

$|Cay_S(G)|$ es δ-hiperbólico $D := \lceil 8\delta \rceil + 1$

$b(\varepsilon)$

$R := \{ u v^{-1} \mid u, v \in (S \cup S^{-1})^* \mid |u| < D,$

$u \geq d_S(e, \pi(u)), \quad \pi(v) = \pi(u),$

$|v| = d_S(e, \pi u) \} \cup \{ s s^{-1} \varepsilon \}$
$s \in S \cup S^{-1}$

$\langle S, R \rangle \to G$ suprayectivo.

af: Isomorfismo! Sup. $\pi(w) = e$.

si $long_S(w) = 0$, no hay prob. [si no,

sup. induct. $\pi(w') = e$. $long(w') < long(w)$.] $\Rightarrow w' = 0$.

~~Si w reducida π [illegible]~~

si w es reducida, $\pi(w)$- ciclo.

$w = w' u w''$ con $d_S(e, \pi u) < u \leq D$

Escogemos $v \in (S \cup S^{-1})^*$, $\pi(u) = \pi(v)$.

$|v| = d_S(e, \pi u) < |u|$

$e = \pi(w) = \pi(w')$ [illegible]

[illegible] $\pi(w'')$. [illegible]

Con $w' v w''$ más corta. por hip. de ind $= 0$.

Dos propiedades de Grupos Hiperbólicos (III . 6)

1) existe almenos un elemento de orden infinito.
(no son "monstruos").

2) Si g es de orden infinito,

$$\mathbb{Z} \to G, \quad n \mapsto g^n$$ es un encaje cuasi isométrico

y $[\langle g \rangle : C_{\langle g \rangle}(G)] < \infty$.

La razón. ——•——•——•—— cuasi "$\mathbb{R}$" $= \mathcal{L}$

Si $h \in C_G(g)$ $\langle g \rangle = \mathbb{Z}$ deja invariante a $\{h g^n\} \mathcal{L}$)

$\Rightarrow$ $\{g^n\}$ y $\{h g^n\}$ generan una banda plana

$d(h, \text{Banda}) \geq$ indice $[\langle g \rangle ; C_{\langle g \rangle}(G)]$

<u>Corolario</u> Si G es hiperbólico, entonces $\mathbb{Z}^2$ no es subgrupo de G.

(Razón $\mathbb{Z} < \mathbb{Z}^2$, $[\mathbb{Z}^2 : \mathbb{Z}] = \infty$ $\to \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ $\mathbb{Z}^2 = H = C_H(h) \subset C_G(h)$.
$h \neq e \in H$

$\Rightarrow$ $[G, C_G(h)] \geq [H : C_H(h)]$
$= \infty$.

Crecimiento   Charla EMALCA   16-Jan-2016   (1) (IV)

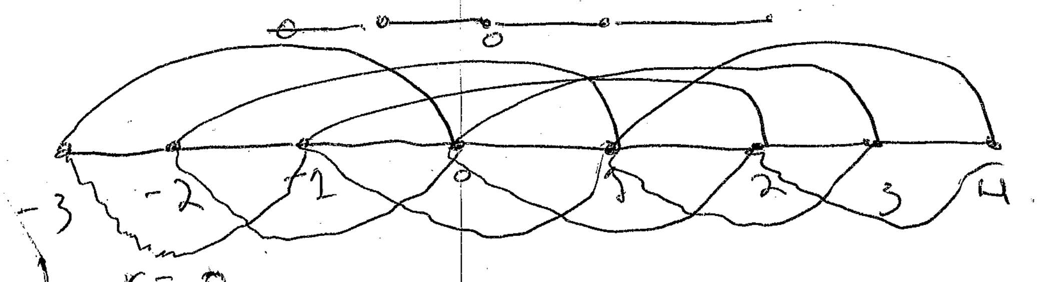
Def G grupo fin. generado $S \subset G$ conj. de generadores.

$$\beta_{G,S} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}.$$
$$r \longmapsto |B_r^{G,S}(e)|.$$

Función de crecimiento.

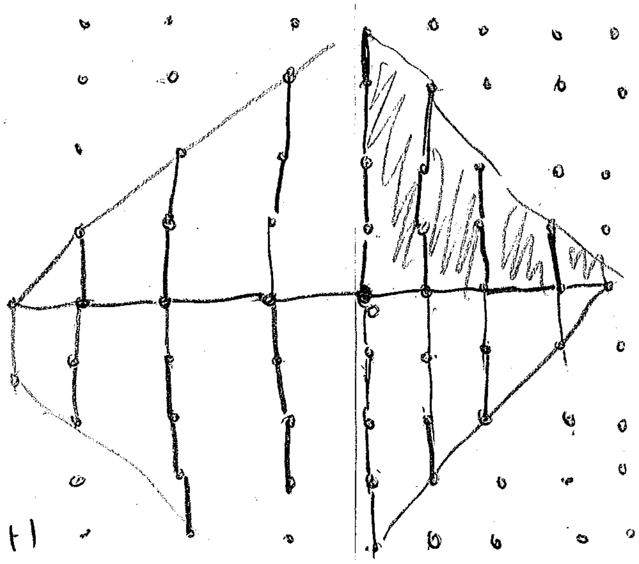
Ejemplos: 1) $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$. $\beta_{\mathbb{Z},\{1\}}(r) = 2r+1$.

1) $\mathbb{Z} = \{2,3\}$,



$$\beta_r = \begin{cases} 1 & r = 0. \\ 5 & r = 1. \\ 6r+1 & r > 1 \end{cases}$$

2): $(\mathbb{Z}^2, \{(1,0), (0,1)\}.)$



$\beta_{\mathbb{Z}^2,S}$

$r \mapsto$

$$1 + 4\left(\sum_{j=1}^{r} (r+1-j)\right)$$
$$= 2r^2 + 2r + 1.$$

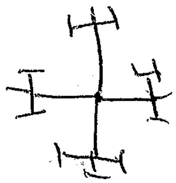
3) Ejercicio $H_{\mathbb{Z}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x,y,z \right\}$

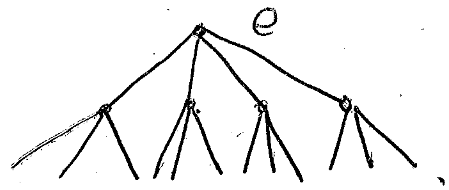
$\cong$

$\langle x, y, z \mid [x,y], [y,z], [x,y] \rangle$
$H_{\mathbb{Z}}$

Es un polinomio de grado 4

F_2 :





$B_r = \cancel{\sum_{j=0}^{r-1} \ldots}$

$$1 + 4\left(\sum_{j=0}^{r-1} 3^j\right) = 1 + 2\left((3)^r - 1\right)$$

Prop. Sea G fin. gen. $S \subset G$ long. de generadores finitos. $\forall\, r, r' \in \mathbb{N}$:

1) $\beta_{G,S}(r+r') \leq \beta_{G,S}(r)\, \beta_{G,S}(r')$

2) $\beta_{G,S}$ es estrictamente creciente:
$$\beta_{G,S}(r) \geq r.$$

3) $$\beta_{G,S} \leq \beta_{F(S),S}(r) = 1 + \frac{|S|}{|S|-1} \cdot \left[(2\cdot|S|-1)^r - 1\right]$$

(subexponencial!)

1 y 2 : fáciles, hacer en ejercicios!

3): $|B_r^{G,S}(e)| = |\varphi(B_r^{F(S),S})| \leq |B_r^{F(S),S}|$.

$\varphi : F(S) \twoheadrightarrow G$. contractiva y sobre.

¿Qué vamos a estudiar?

Def Una función de crecimiento generalizada es $f: \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ creciente.

dadas f, g, g cuasi-domina a f si existen c, b. $f(r) \leq c\, g(cr+b) + b$.

Notación: $f \preccurlyeq g$.

Dos funciones de crec generalizadas son cuasi eq si $f \prec g$ y $g \prec f$.

Ejercicio: $x \mapsto x^a \preccurlyeq x \mapsto x^{a'} \iff a \leq a'$

Lema Sean G, H fin gen, S, T conj. gen finitos.

1. $(G, d_S) \to (H, d_T)$ encaje cuasiisométrico $\Rightarrow \beta_{G,S} \preccurlyeq \beta_{H,T}$.
2. G y H cuasi isom $\Rightarrow \beta_{G,S}$ y $\beta_{H,T}$ cuasi eq.

Dem

$$\frac{1}{c} d_S(g,g') - c \leq d_T(f(g), f(g')) \leq c\, d_S(g,g') + c$$

$e' := f(e)$.

$$\Rightarrow f(B_r^{G,S}(e)) \subseteq B_{cr+c}^{H,T}(e')$$

$$d_S(g,g') \leq c\, d_T(f(g), f(g')) + c' = c^2$$

$\forall g, g'$ con $f(g) = f(g')$

$$\Rightarrow \beta_{G,S}(r) \leq |B_{c^2}^{G,S}(e)| \cdot |B_{cr+c}^{H,T}(e')|$$

$$= |B_{c^2}^{G,S}(e)| \; |B_{cr+c}^{H,T}(e)|$$

(4) (IV)

$= \mathcal{B}_{G,S}(c^2) \cdot \mathcal{B}_{H,T}(cr+c)$.

(Queso: eq) eso no depende!

Def: Tipo de crecimiento: Clase de $\mathcal{B}_{S,G}$

Obs - Invariante bajo Q.I.

Ejemplos $\mathbb{Z}^4$ crece como $x \mapsto x^4$.

$\mathbb{H}_{\mathbb{Z}} \to x^4$.

$F_n \longmapsto e^x$.

$\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{H}_{\mathbb{Z}}$ - crecimiento polinomial.

F_n - crecimiento ~~polin~~ exponencial!

→ Hay grupos de crecimiento "intermedio".

Obs - Milnor Schwarz para tipos de crec.

Sea M var. cerrada Riemanniana, $\tilde{M}$ su cubierta univ.

con. $\mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ $r \overset{V}{\longmapsto} \mathrm{Vol}_{\tilde{M}}\, B_r^{\tilde{M}}(x)$.

ent V es cuasi eq a la de crecimiento de $\pi_1(M)$. Comparar con las geometrías Nil, Sol, $\mathbb{H}^3$, S^3.

Corolario

$f: M \to N$ apl. continua, $\deg(f) \neq 0$.

ent $r \mapsto \mathrm{vol}_{\tilde{M}}(B_r^{\tilde{M}}(x)) \succeq \mathrm{Vol}_{\tilde{N}}(B_r^{\tilde{N}}(x))$.

Dem: ~~Supp.~~ Si f tiene grado no cero,

(5) (N)

entonces, $\pi_1(M) \to \pi_1(N)$ tiene índice finito.
(existe $\bar{N} \to N$ con $\pi_1(\bar{N}) = G$.
$\bar{N}$ - convexa, de dim = dim N, sin frontera.
existe

$$\begin{tikzcd} & \bar{N} \arrow[d, "p"] \\ M \arrow[ur, "\bar{f}"] \arrow[r, "f"'] & N \end{tikzcd}$$

$\deg(p) = \#$ hojas, $= [\pi_1(p) : \pi_1(N)]$.
$\Rightarrow$ $[\pi_1(N) : G] = [\pi_1(N) : \mathrm{im}(p)] = \deg(p)$.
$< \infty$.

<u>Corolario</u>: N var. hiperbólica cerrada. M orientada misma dim. Sup π tiene crec. polinomial $\Rightarrow$ no hay $M \to N$ de grado $\neq 0$.

<u>Último comentario</u>: Grupos de crec. polinomial à la Gromov:
G tiene crec. polinomial $\Leftrightarrow$ $H < G$ $[G:H]$
H - nilpotente.
- <u>Si hay tiempo: Universo de Bridson</u>.