

1

2

3

4

Leyes de grandes números para la distribución de grados en gráficas aleatorias con ligas preferenciales

5

Gerónimo Uribe Bravo

6

Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México,

7

Ciudad Universitaria, Coyoacán, 04510. México, D. F.

8

geronimo@matem.unam.mx

Resumen

A partir de la ley fuerte de los grandes números y de un argumento de Ornstein que data de 1965 obtendremos un resultado más reciente: veremos que la cantidad de vértices conectados con otros k en una sucesión de gráficas aleatorias, llamada de ligas preferenciales, converge casi seguramente conforme la cantidad de vértices tiende a infinito.

9

1. Leyes de los grandes números

10

11

12

13

14

15

16

17

18

19

Las leyes de los grandes números usualmente se interpretan como una justificación matemática de la interpretación frecuentista de la probabilidad. Otra forma de enunciarlo es que dichas leyes permiten observar regularidades que aparecen en grandes colectivos de eventos aleatorios. A continuación recordemos los enunciados precisos de la ley débil y fuerte de los grandes números.

El contexto de la ley fuerte de los grandes números usual es el siguiente. Suponemos que en un espacio de probabilidad, existen variables aleatorias X_1, X_2, \dots con valores reales que son independientes e idénticamente distribuidas. Esto es: para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$

20 se tiene que

$$\mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1) \cdots \mathbb{P}(X_n \leq x_n).$$

21 **Teorema 1.1** (Ley débil de los grandes números). Si $\mathbb{E}(|X_1|) < \infty$ y
22 $\mu = \mathbb{E}(X_1)$ entonces para toda $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mu\right| > \varepsilon\right) = 0.$$

23 A la sucesión de sumas parciales asociada a una sucesión de variables
24 independientes e idénticamente distribuidas se le conoce como caminata
25 aleatoria. Así, la ley de los grandes números también se puede ver como
26 una afirmación acerca de caminatas aleatorias. El teorema anterior fue
27 obtenido por Jakob Bernoulli en [2] en el caso en que $\mathbb{P}(X_i = 1) =$
28 $1 - \mathbb{P}(X_i = 0) = p \in [0, 1]$ (en cuyo caso nos referimos a X_i como
29 una variable aleatoria con distribución Bernoulli de parámetro p) y
30 publicado en su libro *Ars Conjectandi* (el arte de conjeturar). Bernoulli
31 se refería a este resultado como su *Teorema Dorado*.

32 Por otra parte, la ley débil de los grandes números se ha generalizado
33 en el siguiente resultado.

34 **Teorema 1.2** (Ley fuerte de los grandes números). Si $\mathbb{E}(|X_1|) < \infty$ y
35 $\mu = \mathbb{E}(X_1)$ entonces

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} = \mu\right) = 1.$$

36 La diferencia entre las leyes débil y fuerte de los grandes números
37 estriba en el tipo de convergencia utilizada. En la primera, se afirma
38 que el promedio de X_1, \dots, X_n converge en probabilidad a la esperanza
39 de X_1 mientras que la segunda afirma que la convergencia es casi se-
40 gura. Puesto que en cursos avanzados de probabilidad se prueba que la
41 convergencia casi segura implica la convergencia en probabilidad vemos
42 que la ley fuerte implica la débil. Sin embargo, otra diferencia impor-
43 tante es que la ley débil de los grandes números es un enunciado sobre
44 una cantidad finita de variables aleatorias mientras que la ley fuerte
45 involucra a una cantidad infinita de variables aleatorias. Esto aumenta
46 la sofisticación matemática que se requiere para probar la ley fuerte al
47 requerir teoría de la medida. La ley fuerte de los grandes números es
48 un teorema de principios del siglo pasado obtenido en su versión más
49 general por Kintchine en [9]. La prueba clásica de la ley fuerte de los
50 grandes números se basa en el lema de Borel–Cantelli; la prueba más
51 sencilla con estas técnicas que conoce el autor es la dada por Etemadi
52 en [5] que además relaja la hipótesis de independencia. También, en-
53 contramos pruebas de la ley fuerte a partir de la teoría de martingalas;
54 estas pruebas además permiten sustituir la hipótesis de independencia

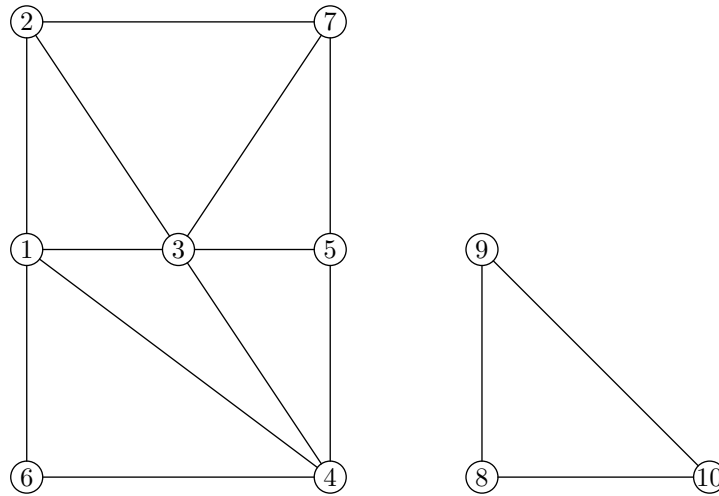


Figura 1. Representación de una gráfica con conjunto de vértices $V = \{1, \dots, 10\}$ y aristas $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \{1, 6\}, \{4, 6\}, \{2, 7\}, \{5, 7\}, \{3, 7\}, \{3, 4\}, \{8, 9\}, \{9, 10\}$ y $\{10, 8\}$

55 por una de simetría llamada intercambiabilidad y conduce al llamado
 56 Teorema de de Finetti, que se encuentra en la base de la estadística
 57 bayesiana. Otra prueba se hace como un caso particular del teorema
 58 ergódico puntual, que a su vez admite una prueba basado en el teorema
 59 ergódico maximal (con una prueba que casi confunde maximalmente,
 60 como afirma Halmos en [7]). Sin embargo, también hay una prueba di-
 61 recta y sencilla del teorema ergódico dada por Katznelson y Weiss en
 62 [8] que se traduce en una prueba distinta a las anteriores de la ley fuerte
 63 de los grandes números.

64 2. Gráficas aleatorias con ligas preferenciales

65 Ahora investigaremos un problema que ha atraído mucho interés desde
 66 que fué planteado en [1]. En dicho artículo, los autores se proponen
 67 crear un modelo de gráficas aleatorias que sea compatible con algunas
 68 características que se observan en gráficas definidas por situaciones de
 69 la vida real.

70 **Definición 2.1.** Una **gráfica** es un par $G = (V, E)$ donde V es un
 71 conjunto (finito) a cuyos elementos llamamos **vértices** y E es una co-
 72 lección de subconjuntos de V de tamaño 2 a cuyos elementos se les da
 73 el nombre de **aristas**.

74 Es común representarlos mediante un dibujo de puntos (que repre-
 75 sentan a los vértices) unidos por líneas entre ellos (que representan a las

76 aristas), como en la figura 1. Un ejemplo concreto de una gráfica toma-
 77 da de la vida real es la asociada a la Red Informática Mundial (World
 78 Wide Web ó WWW): podemos pensar a dicha red como una gráfica
 79 cuyos vértices serían las páginas web que existen y donde incluimos
 80 una arista entre dos páginas si en una de ellas existe un hipervínculo
 81 hacia la otra. Otro ejemplo es la red de patrones de citas, en la que los
 82 vértices son los artículos científicos publicados y hay una arista entre
 83 un par de ellos si uno cita al otro.

84 **Definición 2.2.** Sea $G = (V, E)$ una gráfica. Definimos el **grado** del
 85 vértice $v \in V$ en la gráfica G , denotado $\delta(v, G)$, como la cantidad de
 86 aristas que ligan (o formalmente que contienen) al vértice v .

87 La **distribución de grados** de la gráfica G es la función $\Gamma_G : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
 88 tal que $\Gamma_G(k)$ es la fracción de vértices en la gráfica G que tienen grado
 89 k .

90 Si G es la gráfica asociada a la WWW o a la red de patrones de
 91 citas, se observa una característica curiosa de la distribución de grados:
 92 existen constantes C y γ tales que

$$\Gamma_G(k) \approx Ck^{-\gamma}$$

93 al menos en una región importante de enteros k . (Para la WWW, esto
 94 se reporta en [1].) Se dice entonces que la distribución de grados de
 95 G sigue una ley de potencia. El decrecimiento en la distribución de
 96 grados es más lento que si hubiera decrecimiento exponencial (del tipo
 97 p^k) y en general nos dirá que hay una cantidad considerable de vértices
 98 altamente conectados por aristas. Uno de los objetivos de [1] es dar un
 99 modelo de gráficas aleatorias en el que se observen este tipo de leyes de
 100 potencias. Curiosamente, dentro de la red de patrones de citas, dicho
 101 artículo destacaría: una búsqueda en Google Scholar (realizada el 30
 102 de Octubre del 2014) nos dice que dicho artículo es citado ¡por otros
 103 20983! El mecanismo que proponen es el de ir agregando vértices a
 104 la gráfica conforme pasa el tiempo y que dichos vértices se conecten
 105 preferentemente con vértices con grado grande. Esto se conoce como
 106 un mecanismo de ligas preferenciales.

107 2.1 Gráficas de Barabási-Albert

108 A continuación presentamos el modelo matemático formal y los resul-
 109 tados que obtienen en [1] mediante simulación. En dicho artículo se
 110 propone un (proto)modelo para el crecimiento de una gráfica con li-
 111 gas preferenciales. Como hacen notar en [3], en general el modelo no
 112 está bien especificado y es imposible reproducir los resultados salvo en
 113 el caso particular en el que se va agregando un vértice a la vez. Como en

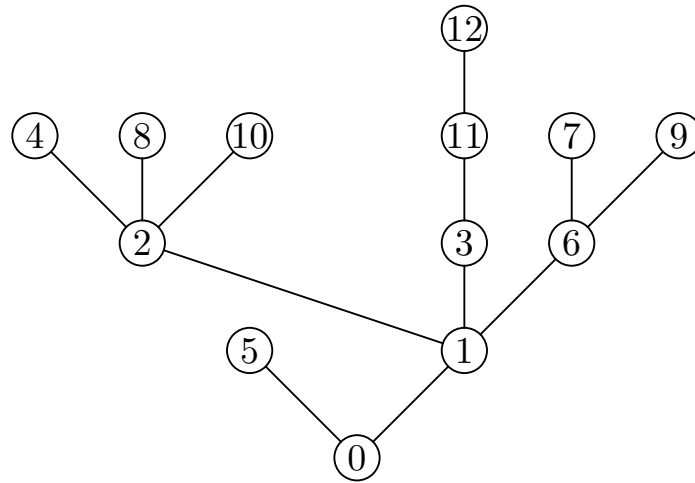


Figura 2. Representación del árbol recursivo asociado al vector $(0, 1, 1, 2, 0, 1, 6, 2, 6, 2, 3, 11)$.

114 [4], nos enfocaremos en este caso, aunque los argumentos que veremos
 115 son válidos con mucha mayor generalidad.

116 Hay un nombre para una sucesión de gráficas que se van construyendo
 117 al agregar vértices uno por uno y agregando una arista de este vértice
 118 a alguno existente: árboles recursivos. Por simplicidad, el conjunto de
 119 vértices será siempre

$$V_n = \{0, 1, \dots, n\}$$

120 para alguna n .

121 **Definición 2.3.** Un **árbol recursivo** de tamaño $n + 1$ es una gráfica
 122 con conjunto de vértices V_n tal que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ existe
 123 exactamente una única arista del tipo $\{i, \pi_i\}$ y se tiene que $\pi_i < i$.

124 Una forma de imaginarse a un árbol recursivo de tamaño n es como
 125 sigue: a cada instante de tiempo i del 1 al n agregamos al vértice i junto
 126 con la arista $\{i, \pi_i\}$. Un ejemplo de un árbol recursivo se puede consultar
 127 en la figura 2. Así, podemos poner en correspondencia a los árboles
 128 recursivos de tamaño n con sucesiones de naturales $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$
 129 tales que $0 \leq \pi_i < i$. Por lo tanto, hay $n!$ árboles recursivos de tamaño
 130 $n + 1$.

131 Examinemos ahora el mecanismo de generación aleatoria de árboles
 132 recursivos con ligas preferenciales.

133 **Modelo de Barabási-Albert:** Sea G_1 el único árbol recursivo de
 134 tamaño 2. Para cada $n \geq 1$ definimos recursivamente a G_{n+1} como
 135 el árbol aleatorio recursivo obtenido de adicionar el vértice $n + 1$
 136 a G_n junto con la arista $\{n + 1, I_{n+1}\}$ donde

$$\mathbb{P}(I_{n+1} = i \mid G_n) = \frac{\delta(i, G_n)}{2n}$$

137 para $i \in V_n$.

138 (La suma de los grados en la gráfica G_n no es una cantidad aleatoria,
 139 sino determinista e igual al doble de aristas puesto que cada arista se
 140 cuenta doble cuando se suma el grado de cada vértice). Al poner en
 141 correspondencia a la gráfica G_n con la sucesión de enteros (I_1, \dots, I_n) ,
 142 podemos utilizar el siguiente código para generar la gráfica en el len-
 143 guaje Octave.

```

144 # El código simula un árbol aleatorio recursivo
145     que sigue el modelo de Barabási-Albert
146 n=30; # Tamaño de la gráfica final
147 I=0; # Gráfica inicial G_1 en su representación
148     como sucesión de enteros
149 # Vector de grados de los vértices
150 w=[1,1];
151 # Se agregan los individuos mediante un ciclo
152 for i=2:(n-1)
153     # Se agrega el vértice i
154     # Se escoge a dónde apunta su arista
155     I(i)=discrete_rnd(0:(i-1),w./(2*i),1);
156     # Se actualizan los grados de los vértices
157     w(I(i)+1)=w(I(i)+1)+1;
158     # Se agrega el grado de i
159     w=[w,1];
160 endfor

```

Código 1. batree.m

161 2.2 Análisis mediante cadenas de Markov (inhomogéneas)

162 Para realizar el análisis riguroso de la distribución empírica de grados,
 163 notaremos que es sencillo asociar cadenas de Markov que nos den acce-
 164 so directo a la distribución de grados sin necesidad de simular al árbol
 165 aleatorio recursivo. En efecto, notemos que si el vértice n se conecta con
 166 un vértice de grado 1 entonces la cantidad de vértices de grado 1 per-
 167 manece constante mientras que la cantidad de vértices de grado mayor
 168 a 1 crece en 1. Por otra parte, si el vértice n se conecta con un vértice de
 169 grado mayor a 1 entonces la cantidad de vértices de grado 1 crece en 1
 170 y la cantidad de vértices de grado mayor a 1 permanece constante. Esto
 171 nos dice que es posible simular directamente la sucesión de vértices de
 172 grado 1 mediante la construcción recursiva siguiente. Sean $(U_n, n \geq 1)$
 173 una sucesión de variables aleatorias uniformes e independientes; esto

174 es, para cada $n \geq 1$ y para cualesquiera $x_1, \dots, x_n \in (0, 1)$,

$$\mathbb{P}(U_1 \leq x_1, \dots, U_n \leq x_n) = x_1 \cdots x_n.$$

175 Sea $C_1^1 = 2$ y definamos

$$C_{n+1}^1 = C_n^1 + \mathbf{1}_{U_n > \frac{C_n^1}{2n}}. \quad (1)$$

176 Una posible interpretación de dicha recurrencia aleatoria es que C^1 es
 177 una especie de caminata aleatoria que a cada paso escoge su distribu-
 178 ción de salto. En efecto, la distribución condicional de $C_{n+1}^1 - C_n^1$ dada
 179 la historia hasta el tiempo n es Bernoulli de parámetro $1 - C_n^1/2n$. For-
 180 malmente, notamos que C^1 es una cadena de Markov inhomogénea. (Se
 181 propone el nombre de caminata aleatoria autoregulada).

182 El siguiente código nos permite simular a C_n^1 y observamos que si
 183 graficamos a C_n^1/n , esto pareciera converger a $2/3$ conforme $n \rightarrow \infty$,
 184 como se ve en la figura 3.

```

185 # El código simula la evolución de la proporción
186     de vértices de grado 1 en el modelo de
187     Barabási-Albert.
188 n=2501; # Tamaño de la gráfica final.
189 c=2; # El vector guardará la evolución de la
190     cantidad de vértices de grado 1.
191     # Para G_1, la cantidad de vértices de
192     grado 1 es 2.
193 for i=2:(n-1)
194 # Se agrega un nuevo vértice
195 # y se ve si es de grado 1 (b=1) o de grado
196     mayor o igual a 1 (b=0).
197     b=(rand > c(end)/(2*i));
198 # Se actualiza la cantidad de vértices de grado
199     1
200     c=[c; c(end)+b];
201 endfor;
202 # Se grafica la evolución de la proporción de
203     vértices de grado 1.
204 plot(c(1:(n+1))./(2:(n+2)),')

```

Código 2. degree1.m

205 Dada la interpretación de C^1 como una especie de caminata aleatoria,
 206 la siguiente heurística se sugiere: si $C_n^1/(n+1)$ convergiera a alguna
 207 cantidad α , digamos en probabilidad, entonces el parámetro de salto
 208 convergería a $1 - \alpha/2$ y entonces C_n^1 sería como una suma de variables

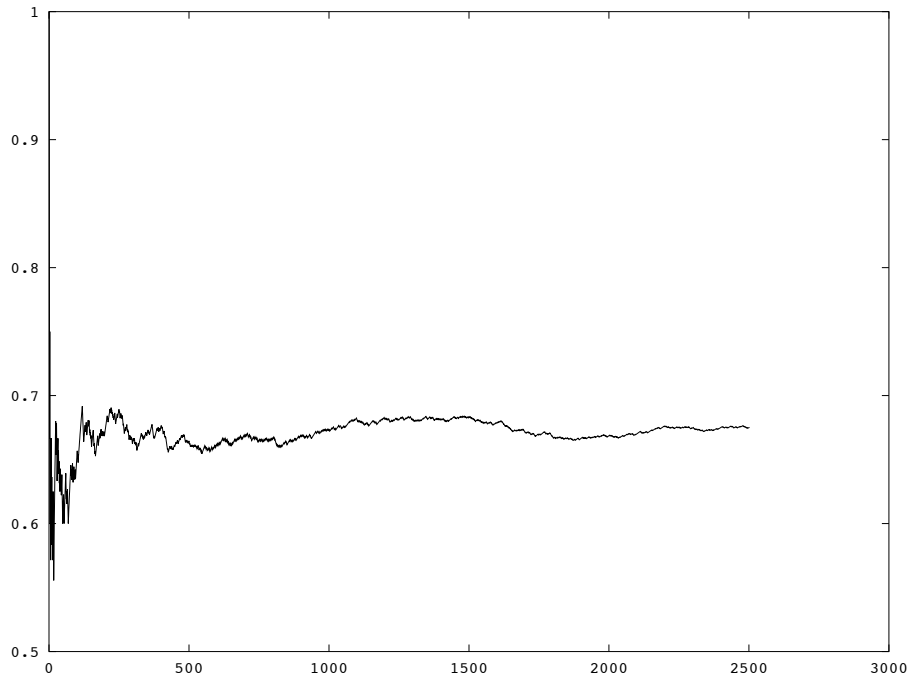


Figura 3. Resultado de ejecutar el código degree1.m

209 Bernoulli de dicho parámetro, por lo que la ley débil de los grandes
 210 números nos diría que C_n^1/n converge a $1 - \alpha/2$. Esto sólo es posible si
 211 $\alpha = 1 - \alpha/2$ ó equivalentemente $\alpha = 2/3$.

212 El análisis para C^2, C^3, \dots tiene una diferencia importante. Ya no es
 213 cierto que C^i sea una cadena de Markov para $i \geq 2$. Lo que sí es cierto
 214 es que para toda $k \geq 1$, (C^1, \dots, C^k) es una cadena de Markov. Es
 215 fácil ver por qué: dividimos a los vértices de G_n en vértices de grados
 216 de 1, de grado 2, ..., de grado k y de grado mayor a k . Al agregar al
 217 vértice $n+1$ para formar G_{n+1} , este se liga a un vértice de grado i con
 218 $i \leq k$ con probabilidad (condicional) $iC_n^i/2n$ mientras que se liga con
 219 un vértice de grado mayor a k con probabilidad condicional

$$1 - \frac{C_n^1 + \dots + kC_n^k}{2n}.$$

220 Lo que notamos es que si el vértice $n+1$ se conecta a un vértice de grado
 221 1 entonces la cantidad de vértices de grado 2 aumenta en 1 y todas las
 222 demás cantidades permanecen constantes. Si el vértice $n+1$ se conecta
 223 a un vértice de grado $i \in \{2, \dots, k-1\}$ entonces la cantidad de vértices
 224 de grado 1 aumenta en 1, la cantidad de vértices de grado i disminuye
 225 en 1 y la cantidad de vértices de grado $i+1$ aumenta en 1. Similarmente,
 226 si $n+1$ se conecta con un vértice de grado k entonces la cantidad de
 227 vértices de grado 1 aumenta en 1 y la cantidad de vértices de grado k

228 disminuye en 1. Así, podemos calcular la distribución condicional del
 229 incremento $(\Delta C_n^1, \dots, \Delta C_n^k)$ dada la gráfica \mathcal{G}_n y concluir que

$$\mathbb{P}\left((\Delta C_n^1, \dots, \Delta C_n^k) = \vec{i} \mid \mathcal{G}_n \right) = \begin{cases} \frac{C_n^1}{2n} & \vec{i}_2 = 1 \text{ y } \vec{i}_i = 0 \text{ para todo } i \neq 2 \\ \frac{iC_n^i}{2n} & \vec{i}_1 = 1, \vec{i}_i = -1, \vec{i}_{i+1} = 1 \text{ y } \vec{i}_j = 0 \text{ si } j \neq i, i+1 \\ \frac{kC_n^k}{2n} & \vec{i}_1 = 1, \vec{i}_k = -1 \text{ y } \vec{i}_i = 0 \text{ para } i \neq 1, k \\ 1 - \frac{C_n^1 + \dots + kC_n^k}{2n} & \vec{i}_1 = 1 \text{ y } \vec{i}_i = 0 \text{ si } i \neq 1 \end{cases}.$$

230 La heurística explicada cuando $k = 1$ sigue siendo válida cuando $k > 1$.
 231 Lo que nos dice es que si C_n^k/n converge a α_k conforme $n \rightarrow \infty$ (digamos
 232 en probabilidad) entonces $(C_n^k, n \geq 1)$ sería, en el límite, una caminata
 233 aleatoria con distribución de salto

$$\mathbb{P}(\text{salto} = -1) = k\alpha_k, \quad \mathbb{P}(\text{salto} = 0) = 1 - k\alpha_k - (k-1)\alpha_{k-1} \quad \text{y} \\ \mathbb{P}(\text{salto} = 1) = (k-1)\alpha_{k-1},$$

234 lo cual a su vez nos dice que C_n^k/n converge a la esperanza de dicha
 235 distribución de salto y que por lo tanto

$$\alpha_k = (k-1)\alpha_{k-1} - k\alpha_k \quad \text{ó} \quad \alpha_k = \frac{k-1}{k+1}\alpha_{k-1}.$$

236 Esta relación de recurrencia se puede resolver recordando que $\alpha_1 = 2/3$,
 237 por lo que

$$\alpha_k = \frac{4}{k(k+1)(k+2)}.$$

238 Notemos que la distribución límite es de tipo ley de potencias:

$$\alpha_k \sim 4k^{-3}.$$

239 La heurística que acabamos de presentar depende del hecho de que
 240 C_n^k/n sea convergente (al menos en probabilidad). Estamos en posición
 241 de enunciar el teorema que nos ocupará el resto del artículo.

242 **Teorema 2.4.** *Casi seguramente C_n^k/n converge conforme $n \rightarrow \infty$*
 243 *hacia α_k .*

244 **2.2.1. Cantidad de vértices de grado 1: el argumento de acopla-**
 245 **miento y retroalimentación de Ornstein**

246 En [6] el autor estudia una generalización del modelo clásico de urnas
 247 de Pólya que es parecido al que acabamos de analizar. Da una prueba
 248 de la convergencia, de manera casi segura, al utilizar un argumento
 249 basado en acoplamiento y la ley fuerte de los grandes números que
 250 el autor atribuye a Ornstein. El argumento que da se puede utilizar
 251 para mostrar el teorema 2.4 cuando $k = 1$ o equivalentemente pare

252 verificar la convergencia casi segura de C_n^1/n hacia $2/3$. Se basa en un
 253 acoplamiento de la caminata aleatoria simple y la posterior obtención
 254 del resultado mediante retroalimentación.

255 La primera etapa consiste en un acoplamiento. Sean $(U_i, i \geq 1)$ las
 256 variables aleatorias independientes con distribución uniforme en $(0, 1)$
 257 con las que definimos a $C_n^1, n \geq 1$ en la ecuación (1). Definamos

$$R_0^p = 0 \quad \text{y} \quad R_{n+1}^p = R_n^p + \mathbf{1}_{U_{n+1} > 1-p}.$$

258 Esta etapa se llama de acoplamiento pues permite construir a todas las
 259 caminatas aleatorias con saltos Bernoulli de parámetro p a partir de
 260 una sólo sucesión de uniformes independientes y, en particular, en el
 261 mismo espacio de probabilidad. Esta construcción además satisface la
 262 monotonía

$$R_n^p \leq R_n^{p'}$$

263 válida si $p \leq p'$.

264 Ahora consideremos $x, y \in [0, 1]$ con $x < y$ y definamos al conjunto

$$O_{x,y} = \left\{ x \leq \liminf_n \frac{C_n^1}{n} \quad \text{y} \quad \limsup_n \frac{C_n^1}{n} \leq y \right\}.$$

265 Sea $\varepsilon > 0$. En dicho conjunto, sea N tal que para toda $n \geq N$ se tenga
 266 que

$$x - \varepsilon < \frac{C_n^1}{n} \quad \text{y} \quad \frac{C_n^1}{n} < y + \varepsilon.$$

267 Entonces, para $n \geq N$ se sigue que

$$R_n^{1-(y+\varepsilon)/2} - R_N^{1-(y+\varepsilon)/2} \leq C_n^1 - C_N^1 \leq R_n^{1-(x-\varepsilon)/2} - R_N^{1-(x-\varepsilon)/2}.$$

268 Sin embargo, por la ley fuerte de los grandes números, se tiene que

$$\lim_n \frac{R_n^p}{n} = p$$

269 lo cual implica que

$$1 - \frac{y + \varepsilon}{2} \leq \liminf_n \frac{C_n^1}{n} \leq \limsup_n \frac{C_n^1}{n} \leq 1 - \frac{x - \varepsilon}{2}.$$

270 Puesto que lo anterior es válido para cualquier $\varepsilon > 0$, se sigue que

$$\mathbb{P}(O_{x,y}) \leq \mathbb{P}(O_{1-y/2, 1-x/2}).$$

271

272 Pasamos ahora al argumento de retroalimentación. Al notar que

$$1 = \mathbb{P}(O_{0,1})$$

273 obtenemos

$$1 = \mathbb{P}(O_{0,1}) \leq \mathbb{P}(O_{1/2,1}) \leq \mathbb{P}(O_{1/2,3/4}) \leq \mathbb{P}(O_{5/8,3/4}) \leq \dots \leq \mathbb{P}(O_{f^{(2n)}(x), f^{(2n)}(y)}) \leq \dots,$$

274 donde $f(x) = 1 - x/2$ y $f^{(n)}$ es la n -ésima composición de f consigo mis-
 275 ma. Puesto que f es una contracción de $[0, 1]$, existe un único punto fijo,
 276 que resulta ser $2/3$ y que es el límite de $f^{(n)}(x)$ conforme $n \rightarrow \infty$ para
 277 cualquier $x \in [0, 1]$. Se concluye que los conjuntos $O_{f^{(2n)}(x), f^{(2n)}(y)}, n \geq 1$
 278 van decreciendo y que su intersección es $O_{2/3, 2/3}$. Por continuidad de la
 279 medida \mathbb{P} se concluye que

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(O_{f^{(2n)}(x), f^{(2n)}(y)}) = \mathbb{P}(O_{2/3, 2/3}) = \mathbb{P}\left(\lim_n \frac{C_n^1}{n} = \frac{2}{3}\right).$$

280

281 **2.2.2. Convergencia casi segura de la distribución empírica de**
 282 **grados**

283 La extensión del argumento anterior a la cantidad de vértices de grado
 284 k para $k \geq 1$ en G_n (que habíamos denotado por C_n^k) tiene sólo una
 285 dificultad adicional. Mientras que la cantidad de vértices de grado 1
 286 tiene una evolución que sólo depende de sí misma, la cantidad de vérti-
 287 ces de grado k para $k \geq 2$ involucra a la cantidad de vértices de grado
 288 i para $i \leq k$. Esto es fácil de ilustrar cuando $k = 2$: gracias al análisis
 289 que hemos hecho sobre el carácter markoviano de (C_n^1, C_n^2) , vemos que
 290 si U_1, U_2, \dots son variables independientes uniformes en $(0, 1)$, entonces
 291 la sucesión $(C_n^1, C_n^2), n \geq 1$ admite la representación

$$\begin{aligned} C_1^1 &= 2, \\ C_1^2 &= 0, \\ C_{n+1}^1 &= C_n^1 + \mathbf{1}_{U_n > C_n^1/2n} \quad \text{y} \\ C_{n+1}^2 &= C_n^2 + \mathbf{1}_{U_n \leq C_n^1/2n} - \mathbf{1}_{C_n^1/2n < U_n \leq (C_n^1 + 2C_n^2)/2n}. \end{aligned}$$

292 La idea de comparar con caminatas aleatorias (esto es, la etapa de
 293 acoplamiento) aún funciona: en efecto, la base de comparación son las
 294 desigualdades

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{[0, p-\varepsilon]} - \mathbf{1}_{[p-\varepsilon, p+q+\varepsilon]} &\leq \mathbf{1}_{[0, p]} - \mathbf{1}_{[p, p+q]} \\ &\leq \mathbf{1}_{[0, p+\varepsilon]} - \mathbf{1}_{[p+\varepsilon, p+q-\varepsilon]}, \end{aligned}$$

295 que serán aplicadas al evaluar las indicadoras en U_n . Si $R^{p,q}$ es la cami-
 296 nata aleatoria definida por

$$R_0^{p,q} = 0 \quad \text{y} \quad R_{n+1}^{p,q} = R_n^{p,q} + \mathbf{1}_{0 \leq U_{n+1} < p} - \mathbf{1}_{p \leq U_{n+1} < p+q},$$

297 observamos en particular que

$$R^{p-\varepsilon, q+2\varepsilon} \leq R^{p,q} \leq R^{p+\varepsilon, q-\varepsilon}.$$

298

299 Si $0 \leq x \leq y \leq 1$, consideremos al conjunto

$$O_{x,y}^i = \left\{ x \leq \liminf_n \frac{C_n^i}{n} \text{ y } \limsup_n \frac{C_n^i}{n} \leq y \right\}.$$

300 Notemos que como $C_n^1/n \rightarrow 2/3$ entonces $O_{2/3,2/3}^1$ tiene probabilidad 1.

301 Nos concentraremos ahora en demostrar la igualdad

$$\mathbb{P}(O_{x,y}^2) \leq \mathbb{P}(O_{f_2(y),f_2(x)}^2) \quad (2)$$

302 si definimos

$$f_2(x) = 1 - \frac{2}{3} - x.$$

303 Por el mismo argumento de retroalimentación que para la cantidad de
304 vértices de grado 1, concluiremos que

$$\mathbb{P}(O_{1/6,1/6}) = 1$$

305 pues f_2 es una contracción en $[0, 1]$ y $1/6$ es su único punto fijo.

306 Supongamos que para cualquier $\varepsilon > 0$ y existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para
307 toda $n \geq N$ se tenga que

$$\frac{2}{3} - 2\varepsilon \leq \frac{C_n^1}{n} \leq \frac{2}{3} + 2\varepsilon \quad \text{y} \quad x - \varepsilon \leq \frac{C_n^2}{n} \leq y + \varepsilon.$$

308 Entonces, para $n \geq N$, observamos que

$$R_{n+1}^{1/3-\varepsilon, y+\varepsilon} - R_n^{1/3-\varepsilon, y+\varepsilon} \leq C_{n+1}^2 - C_n^2 \leq R_{n+1}^{1/3+\varepsilon, x-\varepsilon} - R_n^{1/3+\varepsilon, x-\varepsilon}.$$

309 La ley fuerte de los grandes números nos dice que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_n^{p,q}}{n} = 1 - p - q$$

310 casi seguramente. Por lo tanto, vemos que

$$1/3 - y \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n^2}{n} \quad \text{y} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n^2}{n} \leq 1/3 - x.$$

311 Se deduce la desigualdad (2), misma que como ya mencionamos prueba
312 que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n^2}{n} = \frac{1}{6}$$

313 casi seguramente.

314 El argumento anterior se puede también aplicar a la cantidad C_n^k de
315 vértices de grado k en G_n para $k \geq 2$. Para verlo, definamos

$$D_n^k = \frac{C_n^1 + 2C_n^2 + \cdots + kC_n^k}{2n}.$$

316 Si $U_n, n \geq 1$ es nuestra sucesión de variables uniformes en $(0, 1)$ e
317 independientes entre si entonces $C_n^k, n \geq 1$ tiene la misma evolución
318 que la sucesión (con la misma notación) definida mediante

$$C_1^k = 0 \quad \text{y} \quad C_{n+1}^k - C_n^k = \mathbf{1}_{[D_n^{k-2}, D_n^{k-1}]}(U_{n+1}) - \mathbf{1}_{[D_n^{k-1}, D_n^k]}(U_{n+1}).$$

319 Al aplicar el argumento de retroalimentación de Ornstein vemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n^k}{n} = \alpha_k$$

320 casi seguramente, donde

$$\alpha_k = \frac{k-1}{k+2} \alpha_{k-1},$$

321 y que por lo tanto

$$\alpha_k = \frac{4}{k(k+1)(k+2)}.$$

322 Hemos por lo tanto concluido la prueba del teorema 2.4.

323 Agradecimientos

324 Quiero agradecer a Miriam Rodríguez González por las conversacio-
 325 nes que sostuvimos para la realización de su tesis de licenciatura *Sobre*
 326 *la distribución de grados de las gráficas aleatorias de los modelos de*
 327 *Erdős-Rényi y Barabási-Albert* (UNAM, 2009). En el curso de la inves-
 328 tigación nos topamos con algunos argumentos de la literatura que no
 329 nos quedaron claros. Para remediar esta situación se desarrollaron los
 330 métodos expuestos en el presente artículo. También agradezco al revisor
 331 anónimo que ayudó a evitar algunos errores cometidos en la primera
 332 versión.

333 Bibliografía

- 334 [1] A.-L. Barabási y R. Albert, «Emergence of scaling in random networks», *Science*, vol.
 335 286, núm. 5439, 1999, 509–512.
- 336 [2] J. Bernoulli, «Ars conjectandi», Impensis Thurnisiorum, fratrum, 1713.
- 337 [3] B. Bollobás y O. Riordan, «The diameter of a scale-free random graph», *Combinatorica*,
 338 vol. 24, 2004, 5–34.
- 339 [4] B. Bollobás, O. Riordan, J. Spencer y G. Tusnády, «The degree sequence of a scale-free
 340 random graph process», *Random Structures Algorithms*, vol. 18, núm. 3, 2001, 279–290.
- 341 [5] N. Etemadi, «An elementary proof of the strong law of large numbers», *Z. Wahrsch.*
 342 *Verw. Gebiete*, vol. 55, núm. 1, 1981, 119–122.
- 343 [6] D. A. Freedman, «Bernard Friedman's urn», *Ann. Math. Statist.*, vol. 36, 1965, 956–970.
- 344 [7] P. R. Halmos, «How to write mathematics», *Enseignement Math. (2)*, vol. 16, 1970,
 345 123–152.
- 346 [8] Y. Katznelson y B. Weiss, «A simple proof of some ergodic theorems», *Israel J. Math.*,
 347 vol. 42, núm. 4, 1982, 291–296.
- 348 [9] A. Khintchine, «Sur la loi des grands nombres», *Comptes rendus de l'Académie des*
 349 *sciences*, vol. 188, 1929, 477–479.